UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Offen im Denken

Viele Graphen aber eine Funktion?

Entwicklung einer Lernumgebung zum konzeptuellen Verständnis von Koordinatensystemen in der gymnasialen Einführungsphase

Schriftliche Masterarbeit im Rahmen des Masterstudiums mit Lehramtsoption für Gymnasium und Gesamtschule an der Fakultät für Mathematik an der Universität Duisburg-Essen

vorgelegt von:

Nora Maria Henze

Essen, den 24. Mai 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung 5

2 Fachdidaktischer Hintergrund 7

2.1 Funktionales Denken, Darstellungswechsel und Grundvorstellungen 7

2.1.1 Kernlehrplananalyse und Darstellung der relevanten Kompetenzen 7

2.1.2 Historische Entwicklung der betrachteten Thematik im Schulkontext 8

2.1.3 Funktionen und funktionale Zusammenhänge, funktionales Denken 9

2.1.4 Darstellungsarten und Darstellungswechsel von Funktionen 11

2.1.5 Zuordnungs-, Kovariations-, und Objektaspekt 13

2.1.6 Grundvorstellungen 15

2.2 Digitale Medien im Schulunterricht 19

2.2.1 Definition und Mehrwert digitaler Medien für den Schulunterricht 19

2.2.2 Didaktische Konsequenzen und neue Probleme 22

3 Zielsetzung und Forschungsfrage 26

4 Methodischer Hintergrund 27

4.1 Lernumgebungen 27

4.1.1 Definition und Charakterisierung 27

4.1.2 Lernumgebungen aus mediendidaktischer Sicht 28

4.2 Methode: Design-Based-Research 29

4.2.1 Historische und aktuelle Entwicklungen 29

4.2.2 Charakterisierung und Eigenschaften 30

4.2.3 Abgrenzung zur traditionellen Forschung 32

4.2.4 Veränderte Rolle des Forschers und der Lernenden 33

4.2.5 Kritikpunkte und Schwierigkeiten 34

5 Praktische Durchführung des Projektes 36

5.1 Methodisches Vorgehen 36

5.2 Vortest zur Problemanalyse 36

5.2.1 Kompetenzen und Vorstellung des Testinstruments 38

5.2.2 Ergebnisse des Vortests 46

5.2.3 Quantitative Ergebnisse 47

5.2.4 Deutung der quantitativen Ergebnisse 48

5.2.5 Qualitative Inhaltsanalyse und Darstellung ausgewählter Schülerlösungen 49

5.2.5.1 Aufgabe 1 50
5.2.5.2 Aufgabe 2 51
5.2.5.3 Aufgabe 3 54
5.2.5.4 Aufgabe 4 55
5.2.5.5 Aufgabe 5 56
5.2.5.6 Aufgabe 6 58
5.2.6 Kompetenzen und Konsequenzen für die Lernumgebung 59
5.3 Die innerhalb des Projektes erstellte Lernumgebung 61
5.3.1 Beschreibung der Lernumgebung in erster Form 61
5.3.1.1 Einstieg und Übergang zur Erarbeitungsphase 62
5.3.1.2 Station 1 65
5.3.1.3 Station 2 67
5.3.1.4 Station 3 70
5.3.1.5 Station 4 71
5.3.1.6 Sicherung 72
5.3.2 Durchführung der Lernumgebung und Ergebnisse 73
5.3.2.1 Ergebnisse des Nachtests 73
5.3.2.2 Laufzettelanalyse 75
5.3.2.3 Eindrücke der praktischen Durchführung 77
5.3.3 Überarbeitungs- und Variationsaspekte 78
5.3.3.1 Einstieg 78
5.3.3.2 Station 1 78
5.3.3.3 Station 2 80
5.3.3.4 Station 3 82
5.3.3.5 Station 4 83
5.3.3.6 Sicherung 83
6 Fazit und Ausblick 85
Literaturverzeichnis 88
Abbildungsverzeichnis 91
Tabellenverzeichnis 93
Anhang 94
1 Vor- und Nachtest 94
2 Materialien der finalen Lernumgebung 102
2.1 Einstiegsfolie, Arbeitsaufträge und Merksätze 102

2.2 Laufzettel **104**
2.3 Station 1 ..... **105**
2.4 Station 2 ..... **121**
2.4 Station 3 ..... **127**
2.5 Station 4 ..... **136**
Eidesstattliche Versicherung **138**

Anmerkung:

Im Rahmen der Arbeit wird das generische Maskulinum genutzt, um dem Lesefluss zu erleichtern. Wenn in der folgenden Arbeit beispielsweise von Schülern die Rede ist, sind stets Schülerinnen und Schüler gemeint.

1 Einleitung

Die Thematik der digitalen Medien, spielt im schulischen Alltag schon seit mehreren Jahren eine Rolle und gewinnt immer mehr an Präsenz. Zum einen sind sie aus der privaten Lebenswelt nicht mehr wegzudenken, zum anderen ist es heutzutage in fast jeder Berufssparte unerlässlich, digitale Medien zu kennen und bedienen zu können.

Für den Mathematikunterricht ist dieses Thema deshalb von besonderer Relevanz, da durch die verpflichtende Einführung des Graphiktaschenrechners (GTR) ab August 2014 eines dieser digitalen Werkzeuge unumgänglich Einzug in den Unterricht gehalten hat. Zur Zeit der Verfassung dieser Arbeit schreiben gerade die ersten Jahrgänge ihre Abiturprüfung unter obligatorischer Nutzung eines solchen Graphiktaschenechners.

Diese Einführung bringt in erster Linie Veränderungen mit sich, die sich durchaus positiv auf den Unterricht auswirken können. Beispielsweise können Routineberechnungen erspart und Visualisierungen erleichtert werden (Ministerium für Schule und Weiterbildung, 2012).

Neben diesen und weiteren Vorteilen ist es so, dass jede Veränderung auch Konsequenzen für den Unterricht mit sich bringt, die sich bei Nichtbeachtung nachteilig auswirken können. Zum Beispiel muss der korrekte Umgang mit dem neuen Taschenrechner geübt werden und die Aufgaben müssen insofern überarbeitet werden, dass weiterhin gelernt wird und der Taschenrechner nicht alle Arbeit übernimmt.

In der Vergangenheit durchgeführte Studien haben sich bereits mit diesen Problematiken beschäftigt und Probleme herausgestellt, die bei Schülern im Umgang mit dem GTR entstehen. Cavanagh und Mitchelmore fanden heraus, dass Schüler Probleme mit der Skalierung und dem Maßstab haben. Ein weiteres Problem ist, dass Schüler nicht hinterfragen, was der GTR abbildet und von ihm dargestelltes als wahr annehmen, ohne zu überprüfen, ob es zu dem passt, was gefordert wurde (Cavanagh & Mitchelmore, 2000a).

Mit einem Teil dieser Probleme setzt sich auch diese Arbeit auseinander. Anlass für die Durchführung des Projektes war die Annahme, dass Schüler Probleme mit unterschiedlichen Koordinatenachsen und veränderten Koordinatenursprüngen haben. Diese sind aber Veränderungen, die - je nach Taschenrechnermodell - relativ regelmäßig auftreten, da dieser bei der Darstellung von Graphen unter Umständen nicht immer einheitlich skalierte Achsen präsentiert.

Die Notwendigkeit, sich mit solchen Veränderungen auseinanderzusetzen besteht zudem erst seit dem vermehrten Einsatz von GTR, da vorher nur ideal skalierte Achsen und Ursprünge bei 0 betrachtet wurden. Dies ist bereits in jedem gängigen Schulbuch zu sehen (vgl. Abbildung 6 und Abbildung 7).

Da bisher wenig Material zur Verbesserung dieser Mängel existiert, ist die Methode der Wahl *Design-Based-Research*, da dies in einer Lernumgebung resultiert, die hoffentlich genau die dargestellte Problematik fördert und für die Praxis nutzbar ist.

Im Großen und Ganzen läuft das Projekt so ab, dass zunächst mit Hilfe eines Vortestes diagnostiziert wird, welche Probleme die Schüler konkret mit den zuvor dargelegten Veränderungen haben und wo ein besonderer Förderbedarf besteht. Im Anschluss wird eine Lernumgebung entwickelt, die diese Problembereiche zu fördern versucht.

Infolgedessen wird diese durchgeführt und getestet. Um den Erfolg zu beurteilen werden verschiedene Maßnahmen hinzugezogen. Unter anderem wird der Test erneut mit der neuen Schülergruppe durchgeführt, um zu garantieren, dass die diagnostizierten Probleme tatsächlich geringer werden. Im Anschluss daran erfolgt dann das Re-Design der Lernumgebung.

Bevor das durchgeführte Projekt und die Lernumgebung näher vorgestellt werden, wird der fachdidaktische Hintergrund erarbeitet.

Zunächst wird auf Funktionen und darunterfallende Aspekte eingegangen, die didaktisch relevant sind. Das Projekt ist im Themenbereich der Funktionen verortet und es gibt verschiedene Punkte, wie zum Beispiel Darstellungswechsel und Grundvorstellungen, auf die im Vorhinein eingegangen wird, da diese bei Erstellung und Durchführung der Lernumgebung berücksichtigt werden.

Ein weiterer Punkt, auf den vorher noch einmal genauer eingegangen wird, ist der Aspekt der digitalen Medien im Unterricht und die damit einhergehenden Konsequenzen, Vorteile und Probleme. Durch die zuvor bereits angesprochenen Änderungen im Zuge der Einführung des GTR gibt es auch in diesem Bereich Besonderheiten, die beachtet werden müssen und von konventionellen Unterrichtsformen abweichen.

Erst dann erfolgt die genauere Darlegung der Methode, der Durchführung und der Ergebnisse in Form der letztendlich resultierenden Lernumgebung.

2 Fachdidaktischer Hintergrund

2.1 Funktionales Denken, Darstellungswechsel und Grundvorstellungen

Das erste Kapitel legt den didaktischen und fachlichen Rahmen dar, in dem das Projekt stattfindet. Dazu wird zunächst ein Bezug zum Kernlehrplan an Gymnasien hergestellt und es wird erläutert, welche Themenbereiche für diese Arbeit in Betracht gezogen werden müssen. Der Inhaltsbereich, in dem die Problematik des konzeptuellen Verständnisses von Koordinatensystemen relevant ist, ist im schulischen Kontext der der Funktionen. Danach geht es darum, zu charakterisieren, welche Rolle Funktionen und funktionales Denken im Unterricht spielen, womit auf einhergehende Aspekte und Darstellungsarten von Funktionen eingegangen wird. Diese sind Grundlage der durchgeführten Studie und spielen neben den behandelten Schwierigkeiten eine Rolle im Lernprozess. Abschließend wird auf Grundvorstellungen in Bezug auf Funktionen und im Allgemeinen eingegangen, da diese im Rahmen der Studie gefördert und von Seiten der Schüler neu reflektiert werden müssen.

2.1.1 Kernlehrplananalyse und Darstellung der relevanten Kompetenzen

Allgemein findet sich die zugrundeliegende Thematik des Projektes im Kernlehrplan für Gymnasien innerhalb der prozessbezogenen Kompetenzen im Themenfeld Problemlösen, in dem Probleme erfasst, erkundet und gelöst werden sollen. Die den Schülern vermutlich unbekannten Veränderungen der Koordinatensysteme fallen in diesen Kompetenzbereich. Außerdem ist der graphikfähige Taschenrechner ein weiteres Element des Projektes, womit auch das Themenfeld Werkzeuge eine Rolle spielt.

Wie bereits erwähnt fällt das Projekt im Rahmen der inhaltsbezogenen Kompetenzen in den Bereich Funktionen. Hier sollen unter anderem Beziehungen und Veränderungen beschrieben und erkundet werden, worunter die im Projekt gestellten Aufgaben fallen (Ministerium für Schule und Weiterbildung, NRW, 2007, S. 11ff.).

Betrachtet man die Anforderungen am Ende der einzelnen Jahrgangsstufen genauer, so wird im Bereich Funktionen bereits am Ende der Jahrgangsstufe 8 der Wechsel zwischen verschiedenen Darstellungen und die richtige Interpretation im Sachzusammenhang von den Schülern verlangt. Am Ende der Jahrgangsstufe 9 wird diese Fähigkeit der Nutzung

verschiedener Darstellungsarten wie Wertetabelle und Graph auf Funktionen, und nicht nur Zuordnungen, weiter verbessert. Die Schüler müssen diese geeignet auswählen können und Vor- und Nachteile kennen (Ministerium für Schule und Weiterbildung, NRW, 2007, S. 17ff.).

Gerade dieser Bereich ist für die Fördermaßnahmen der Studie wichtig, da diese Fähigkeiten Grundlage dafür sind, die in der Lernumgebung angestrebten Lernziele zu erfüllen. Im Bereich Werkzeuge wird am Ende der Jahrgangsstufe 9 verlangt, geeignete Werkzeuge auszuwählen und zu beherrschen, dies schließt sowohl klassische als auch neuere - wie den GTR - mit ein (Ministerium für Schule und Weiterbildung, NRW, 2007, S. 29ff.). Hier wird die Notwendigkeit des Graphiktaschenrechners und deren Beherrschung sichtbar. Zu einem späteren Zeitpunkt der Arbeit wird darauf noch genauer eingegangen. Bei Betrachtung des Lehrplans wird vor allem die Relevanz des Funktionalen Denkens, die des tiefgreifenden Verstehens von Funktionen und deren Eigenschaften im Schulunterricht deutlich. Dies ist unter anderem auch Grundlage des in dieser Arbeit durchgeführten Projektes. Mit dem tiefgreifenden Verständnis von Koordinatensystemen geht das der Funktionen direkt einher.

Alle diese in den unteren Jahrgangsstufen zu erlernenden Kompetenzen spielen auch weiterhin im Themenbereich der Analysis in der Oberstufe eine Rolle und müssen gefestigt werden, falls dies noch nicht geschehen ist. Betrachtet man die Abiturvorgaben für das Jahr 2017, so sieht man auch dort die Relevanz schon dadurch, dass der GTR verpflichtendes Hilfsmittel ist. Außerdem werden die Kontexte der Unterstufe auch wieder relevant, wenn es im Bereich der Analysis um die Betrachtung von Exponential- und Logarithmusfunktionen geht, da diese mit den in der Unterstufe gelernten Fähigkeiten und Werkzeugen untersucht werden. Auch in den Bereichen der Integralrechnung ist vor allem die Fähigkeit wichtig, Funktionen darstellen zu können (Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen, 2017).

2.1.2 Historische Entwicklung der betrachteten Thematik im Schulkontext

Funktionale Zusammenhänge und Funktionen sind, wie oben gesehen, ein eigener Teil des Lehrplanes der Sekundarstufe 1, was zeigt, welch große Rolle dieser Themenbereich mittlerweile im schulischen Alltag spielt. Noch vor einiger Zeit waren diese noch Teil der Algebra (Büchter, 2008). Bevor es aber um die Eigenschaften und die genauere

Bedeutung von funktionalem Denken und funktionalen Zusammenhängen gehen soll, wird zunächst ein kurzer Blick auf die Historik geworfen. Dafür soll das Werk von Vollrath betrachtet werden, in dem er bereits 1989 eine Vielzahl von Studien untersuchte, um eine begriffliche Abgrenzung zu schaffen und funktionales Denken zu charakterisieren. Bereits 1905 wurde in den Meraner Vorschlägen verlangt, das funktionale Denken als zentralen Inhalt in den Mathematikunterricht zu integrieren (Gutzmer, 1980; zit. nach Vollrath, 1989). Daraufhin wurden Versuche gestartet dies umzusetzen, meist aber lediglich durch eine zeitlich frühere Behandlung des Funktionsbegriffs. Die verfrühte Behandlung führte zu einer starken Reduzierung auf die inhaltliche Betrachtung und rührt nach Vollrath daher, dass die Meraner Vorschläge dies unglücklich darstellten und formulierten. Mitte des 20. Jahrhunderts war dadurch der Begriff eher negativ konnotiert (Vollrath, 1989). Wie jedoch bereits die Auseinandersetzung Vollraths mit dem Thema zeigt, steigt das Interesse gegen Ende des Jahrhunderts wieder und bis heute gibt es kontinuierlich Forschungen zum funktionalen Denken und Vorschläge, Schülern das funktionale Denken näher zu bringen und zu erleichtern.

Die Charakteristika und die Maßnahmen, die nötig sind, um eben dies umzusetzen, werden nun näher betrachtet.

2.1.3 Funktionen und funktionale Zusammenhänge, funktionales Denken

Zunächst einmal soll sich mit Funktionen und funktionalen Zusammenhängen beschäftigt werden. Diese können, wenn man so will, überall im Alltag gefunden werden. Beispielsweise bei einer Tankstellenanzeige, die den aktuellen Preis pro Liter der verschiedenen Kraftstoffarten darstellt oder bei der Angabe der Temperatur in Abhängigkeit von der Tageszeit (Büchter, 2008; Laakmann, 2013). Solche Situationen lassen sich im schulischen Kontext, aber auch bei tatsächlichen wissenschaftlichen Arbeitsweisen, durch Funktionen erfassen und beherrschen. Dies geschieht insofern, dass so eine weitere Analyse des Zusammenhangs, ein Blick in die Zukunft oder einer in die Vergangenheit ermöglicht wird (Vollrath, 1989, Büchter, 2008). So lassen sich durch Funktionen beispielsweise Aussagen über zeitliche Entwicklungen machen. Außerdem kann man Änderungen bestimmter Größen und Abhängigkeiten erfassen (Vollrath, 1989).

Im schulischen Kontext werden Funktionen meist folgendermaßen definiert.

> *„Eine Funktion ist eine eindeutige Zuordnung der Elemente einer nicht-leeren Menge A zu den Elementen einer Menge B, geschrieben $f: A \rightarrow B$. Dabei wird jedem Element $x \in A$ eindeutig ein Element $y \in B$ zugeordnet, geschrieben $x \rightarrow y = f(x)$. A wird dann als Definitionsmenge bezeichnet, B als Zielmenge und $f(A) = \{f(x) | x \in A\}$ als Wertemenge. Für $A, B \subset R$ lässt sich der Funktionsgraph (oder kurz: Graph) von f (zumindest ausschnittsweise) in einem Koordinatensystem darstellen, genauer ist der Graph die Menge $G = \{(x|f(x) | x \in A\}$." (Büchter & Henn, 2010, S.18).*

Hier wird zum einen die Zuordnungsfunktion deutlich, zum anderen wird auf die verschiedenen Darstellungsformen aufmerksam gemacht, beides wird im weiteren Verlauf dieses Kapitels noch einmal angesprochen.

Der Begriff des funktionalen Zusammenhangs steht mit dem der Funktionen direkt in Verbindung: Es handelt sich um innerunterrichtliche Denkweisen, die für den Umgang mit Funktionen essentiell sind. In diesem Kontext ist es wichtig, funktionale Beziehungen zu erkennen und in der Lage zu sein, funktionale Begriffsbildungen nachzuvollziehen und zu tätigen. Ein weiterer Aspekt des funktionalen Denkens ist die funktionale Argumentation, beispielsweise in Form von Beweisen. Zuletzt können Funktionen als kognitive Modelle verstanden werden, mit denen umgegangen werden muss. Es können außerdem unterschiedliche Ausprägungen von funktionalem Denken existieren, vom intuitiven Gebrauch bis hin zu hochentwickelten Methoden (Vollrath, 1989). Um funktionales Denken im Schulkontext zu ermöglichen, ist es wichtig, dass funktionale Zusammenhänge sowohl innerhalb, als auch außerhalb der Mathematik erkannt werden können. Schülern sollte die Möglichkeit gegeben werden, Phänomene zu erkunden, die funktionale Zusammenhänge beinhalten, sie sollten nicht direkt mit Beschreibungen und Analysen konfrontiert werden. Wenn zu früh mathematisiert wird, werden ihre Vorstellungen behindert (Büchter, 2008).

Leuders äußert sich zum funktionalen Denken im Schulalltag folgendermaßen.

> *„Schülerinnen und Schüler zu einem Denken in Funktionen zu führen, bedeutet, sie zu befähigen, in unterschiedlichen Situationen Zusammenhänge funktional zu erfassen, mit informellen und auch formaleren Mitteln zu beschreiben, und mit Hilfe dieser Mittel Probleme zu lösen" (Leuders, 2005, S.3)*

Das fasst die Prozesse, die funktionales Denken im Schulalltag anregen, noch einmal zusammen und betont noch einmal die Wichtigkeit der Konfrontation mit realen Situationen.

2.1.4 Darstellungsarten und Darstellungswechsel von Funktionen

Betrachtet man erneut die zuvor gegebene Definition von Büchter und Henn, so war dort die Rede von der Darstellung im Funktionsgraphen. Neben dieser gibt es noch weitere Darstellungsarten von Funktionen. Alle sollten im Unterrichtsalltag regelmäßig verwendet werden, da Schüler so die verschiedenen Gesichter der Funktionen kennenlernen, ihre Vor- und Nachteile entdecken und individuellen Präferenzen folgen können. Nur wenn die verschiedenen Darstellungsarten bekannt sind und sie genutzt werden können, können funktionale Zusammenhänge erkannt werden (Büchter, 2008). Es ist so möglich, so auf die sehr abstrakten mathematischen Objekte, mit denen gearbeitet werden soll, auf unterschiedliche Arten zuzugreifen. Durch Darstellungswechsel können also Aussagen über diese abstrakten Begriffe getroffen werden. Im Unterricht stellt dies einen zentralen Baustein beim Kompetenzaufbaues der Schüler dar (Laakmann, 2013).

Im Folgenden werden die verschiedenen Darstellungsformen vorgestellt:

Büchter und auch andere Autoren unterscheiden in vier grundsätzliche Darstellungsformen: graphisch, verbal, numerisch und symbolisch[1]. Mit graphischen Darstellungsformen sind Funktionsgraphen oder Diagramme gemeint, die die Funktion darstellen. Verbale Darstellungsarten sind Beschreibungen von Situationen oder Abläufen, also das, was im Allgemeinen als der Sachzusammenhang verstanden wird. Numerisch werden Funktionen durch konkrete Wertepaare dargestellt, meist durch eine Wertetabelle. Schließlich gibt es noch die symbolische Darstellung, die meist in Form des Funktionsterms auftritt (Malle, 2000; Leuders, 2005; Büchter, 2008; Laakmann, 2013). Diese stellen diese ein zentrales Thema der Mathematikdidaktik dar, Schüler müssen in der Lage sein, diese verschiedenen Formen zu kennen und bei Bedarf zwischen ihnen wechseln können. Um diesen Wechsel angemessen nachzuvollziehen, ist allerdings eine Vielzahl von Tätigkeiten notwendig, die Leuders in folgender Abbildung darstellt.

[1] Zum Teil sind die Bezeichnungen unterschiedlich, die Bedeutung ist jedoch bei allen einbezogenen Quellen die Gleiche.

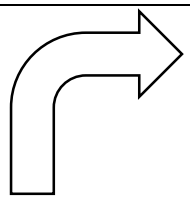
	verbal	numerisch	graphisch	symbolisch
verbal		Werte finden	skizzieren	algebraisch beschreiben
numerisch	lesen		Punkte einzeichnen	annähern (z. B. lineare Regression)
graphisch	interpretieren	ablesen		annähern (z.B. Kurven hindurchlegen)
symbolisch	Variablen interpretieren	berechnen	skizzieren	

Tabelle 1 Vielfältige Tätigkeiten beim Darstellungswechsel (modifiziert nach Leuders, 2005)

Zum einen ist es wichtig, diesen Wechsel als Schüler durchführen zu können, da nur so ein hinreichendes Verständnis von Funktionen erlangt werden kann. Zum anderen ist ein stetiger Wechsel im Unterrichtsalltag und allgemein wichtig, da jede Art der Darstellungsform ihre Stärken und Schwächen hat und sich für bestimmte Ziele besser eignet als andere. Außerdem wird so die Heterogenität einer Klasse berücksichtigt und die individuellen Präferenzen betrachtet (Leuders, 2005; Büchter, 2008). Beschäftigen sich Schüler außerdem konntinuierlich mit Darstellungsformen und -wechseln, werden neben den fachlichen Kompetenzen auch andere wie Lesen, Interpretieren und Modellieren ausgebildet und die Bildung neuer Begriffe wird gefördert (Leuders, 2005).

Im Unterrichtsalltag muss Schülern also die Möglichkeit gegeben werden, die verschiedenen Darstellungsarten zu nutzen und den Umgang mit ihnen zu lernen, Außerdem müssen sie zwischen ihnen sinnvoll wechseln lernen. Dafür muss gelernt werden, wie die verschiedenen Darstellungen zu lesen sind, welche Informationen man ihnen entnehmen kann und sie müssen beurteilen können, welche Formen in welcher Situation besser oder schlechter geeignet sind. Abschließend sollte nicht außer Acht gelassen werden, dass die Schüler natürlich Vorerfahrungen aus anderen Fächern und aus ihrer Lebenswelt mitbringen, die sowohl vor- als auch nachteilig seien können (Laakmann, 2013). Vorteilig insofern, dass Vorwissen besteht, von dem im Unterricht

profitiert werden kann. Es kann aber auch sein, dass die Schüler Fehlvorstellungen aufgebaut haben, was für den Unterricht eher nachteilig ist.

Neben dem Wechsel zwischen den Darstellungsformen kann auch innerhalb der einzelnen Formen die Darstellung gewechselt werden (*treatment*), um dies genauer darzustellen, hat Laakmann die zuvor genutzte Tabelle überarbeitet und die Wechsel innerhalb der Register ergänzt.

Von/nach	Verbal	Graphisch	Tabellarisch	Symbolisch
Verbal	umformulieren	Skizzieren	Werte finden	Algebraisch beschreiben
Graphisch	Interpretieren	Skalenskalierung ändern	Ablesen	Annähern Kurven hindurch legen
Tabellarisch	Lesen	Punkte einzeichnen.	Weitere Werte ermitteln	Annähern anpassen z. B. Regressionen
Symbolisch	Formeln interpretieren	Skizzieren	Berechnen	Algebraisch umformen

Tabelle 2 Tätigkeiten beim Darstellungswechsel von Funktionen nach Leuders 2005 (entnommen aus Laakmann, 2013)

Die Wechsel innerhalb eines Registers spielen eine Rolle für die hier dargelegte Arbeit, finden jedoch im Unterrichtsalltag wenig Erwähnung, obwohl die Notwendigkeit - vor allem seit Einführung der Graphiktaschenrechner - besteht. In dem Kapitel, welches sich mit den digitalen Medien und den damit einhergehenden Problemen beschäftigt, wird dies noch einmal aufgegriffen.

2.1.5 Zuordnungs-, Kovariations-, und Objektaspekt

Betrachtet man nun noch einmal die Definition von Funktionen vom Anfang des Kapitels an, so ist dort von der eindeutigen Zuordnung die Rede. Dies ist eine übliche Auffassung von Funktionen, wie sie im täglichen Schulgeschehen oft genutzt wird. Sie ist für den formalen Aufbau mathematischer Vorstellungen zwar ausreichend, für das praktische Arbeiten mit Funktionen reicht es aber meist nicht aus (Malle, 2000). Um funktionale

Zusammenhänge ausreichend zu charakterisieren, sind drei verschiedene Grundvorstellungen zu unterscheiden:

Als Erstes gibt es den Zuordnungsaspekt, der in der zuvor betrachteten Definition schon Erwähnung findet. Eine Größe wird hier einer anderen eindeutig zugeordnet.

Der zweite Aspekt ist der der Kovariation, also das Phänomen, dass sich eine Größe in Abhängigkeit von der anderen verändert. Dies ist eine im Vergleich zur Zuordnung globalere Sicht auf die Funktion. Bei der Zuordnung wird die Funktion lokal betrachtet, da es hier um einzelne Punkte geht.

Zuletzt geht es darum zu betrachten, wie sich die Funktion als Ganzes verhält, dies ist der Objektaspekt. Dieser ist die globalste Art und Weise, eine Funktion zu betrachten (Vollrath, 1989; Malle, 2000; Leuders, 2005; Büchter, 2008).

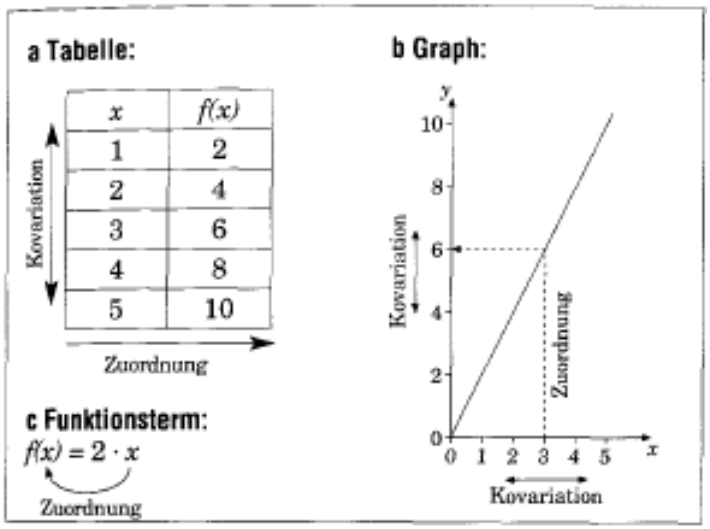


Abbildung 1 Zuordnung und Kovariation anhand verschiedener Darstellungsformen (Malle, 2000)

Besonders den Zuordnungs- und Kovariationsaspekt kann man auch in den Darstellungsformen finden. Liest man eine Tabelle waagerecht, ist die Zuordnung zu erkennen, senkrecht die Kovariation. Auch bei Funktionsgraphen sind beide Aspekte zu finden. Beim Funktionsterm ist der Zuordnungsaspekt leicht zu finden, die Kovariation muss allerdings indirekt erschlossen werden und ist nur bei sehr leichten Beispielen direkt zu sehen (vgl. Abbildung 1) (Malle, 2000).

Auf den Objektaspekt geht Malle zwar nicht ein, er ist aber in der graphischen Darstellungsform zu finden. Ist der Ausschnitt, der numerisch erfasst wird, groß genug, ist das auch hier möglich.

In der symbolischen Darstellungsform ist der Fall ähnlich wie beim Kovariationsaspekt, bei einfachen Beispielen lässt sich das Verhalten der Funktion als Ganzes erkennen, ansonsten muss dieser wieder erschlossen werden. Laakmann hat ebenfalls noch einmal

zusammengefasst, wie die Grundvorstellungen in Bezug auf Funktionen und die verschiedenen Darstellungsarten im Schulalltag miteinander in Verbindung stehen.

Darstellung/ Grundvorstellung	sprachlich	graphisch	tabellarisch	symbolisch
Zuordnungsaspekt	Lineare Zuordnung lokal nicht erkennbar	Lineare Zuordnung lokal nicht erkennbar	Lineare Zuordnung lokal nicht erkennbar	Im der Funktionsgleichung $f(x) = m \cdot x + b$ erkennbar
Kovariationsaspekt	Informationen zum gleichmäßigen Änderungsverhalten dekodieren	Mit graphischen Mitteln aufzeigen, dass Punkte auf einer Strecke liegen	Aus Differenzen der x- und y- Werte die gleichmäßige Steigung ablesen oder durch Steigungsquotienten berechnen	In der Funktionsgleichung $f(x) = m \cdot x + b$ die Bedeutung von m als Steigungskoeffizient erkennen
Funktion als Ganzes	Informationen zur Gesamttypus - globale gleichmäßige Veränderung dekodieren	Mit graphischen Merkmalen aufzeigen, dass alle Punkte auf einer Geraden liegen	Berechnen, dass zu gleichen Zuwächsen der Argumente stets gleiche Zuwächse der zugeordneten Größen gehören	Aus der Funktionsgleichung $f(x) = m \cdot x + b$ die Kenngrößen m und b als typisierende Elemente erkennen

Tabelle 3 Darstellungen und Grundvorstellungen zu linearen Funktionen, in Anlehnung an Hußmann/Laakmann 2011, S 7 (entnommen aus Laakmann, 2013)

Zwar bezieht er sich hier nur auf lineare Funktionen, der Zusammenhang ist jedoch dennoch gut zu entnehmen. Diese drei Grundvorstellungen sind ebenfalls ein großer Faktor, um effektiv mit Funktionen arbeiten zu können. Schüler müssen dabei unterstützt werden, diese adäquat aufzubauen. Entsprechende Lernumgebungen und Lernziele sollten dies bei der Arbeit mit Funktionen berücksichtigen.

2.1.6 Grundvorstellungen

Nachdem schon über drei wichtige Aspekte im Umgang mit Funktionen gesprochen wurde, soll anschließend noch auf Grundvorstellungen in einem allgemeinen Sinne eingegangen werden. Diese spielen bei jeder Unterrichtsplanung eine Rolle und sollten stets berücksichtigt werden, wenn es darum geht, bestimmte Lernziele zu erreichen. Grundvorstellungen sind Grundlage der mathematischen Beschreibung und Behandlung

und erlauben eine unterschiedliche Sichtweise auf bestimmte Situationen (Leuders, 2005).

Dem folgenden Abschnitt ist das Grundvorstellungskonzept von vom Hofe zugrunde gelegt. Es gibt verschiedene Argumente, die dafürsprechen, die aktuelle Schulbildung im Mathematikunterricht zu überarbeiten und ein zeitgemäßeres Grundbildungskonzept zu entwickeln. Dies schließt neue Aufgabenformate, Methoden und Medien mit ein und zählt zu den Hauptanlässen für das hier durchgeführte Projekt. Es ist schon lange ein Argument vieler Kritiker, dass der Mathematikunterricht heute zu sehr darauf ausgelegt ist Standardverfahren zu lernen. Dabei kommt die Vermittlung von flexibel anwendbaren Fähigkeiten zu kurz (Vom Hofe, 1992). Außerdem wird häufig kritisiert, dass Mathematik in der außerschulischen Lebenswelt während und nach der Schulzeit nutzlos ist.

Vom Hofe schiebt diese Probleme vor Allem auf eine ungenügende Ausbildung von Grundvorstellungen und einem mangelnden Verständnis von mathematischen Begriffen und Verfahren und kritisiert eine mangelnde Verbindung zwischen den mathematischen Inhalten und der individuellen Begriffsbildung (vom Hofe, 1992; vom Hofe, 2003). Mathematische Grundbildung sollte demnach nicht nur aus der geeigneten Anwendung von Methoden und Werkzeugen bestehen, sondern viel mehr ein Werkzeug zur Modellierung und geistigen Gestaltung der Umwelt darstellen. Der wie oben charakterisierte Umgang mit Mathematik ist nichts anderes als Modellbildung, bei der die Grundvorstellungen genau an der Schnittstelle zwischen Realität und Mathematik auftreten. Eine Ausbildung von Grundvorstellungen ist nötig, um zwischen Mathematik und Realität *übersetzen* zu können (vom Hofe, 2003).

Die Grundvorstellungen, die in Bezug auf Funktionen aufgebaut werden müssen, sind die bereits erwähnten Zuordnungs-, Kovariations- und Objektaspekte. Allgemein lassen sich drei Kernpunkte der Grundvorstellungen herausarbeiten:

- Ein mathematischer Begriff ist in der Regel mit mehreren Grundvorstellungen erfassbar

Erst wenn diese erfasst und auch intern miteinander vernetzt worden sind, kann eine ausreichende Vorstellung des Begriffs vorhanden sein und nur so ist dieser in seiner Gänze zu erfassen.

- Es gibt primäre und sekundäre Grundvorstellungen

Die Primären, welche zuerst gemacht werden und durch Handlungserfahrungen aufgebaut werden, werden nach und nach im Laufe der Schulzeit durch Sekundäre ersetzt,

die immer mehr aus mathematischer Unterweisung stammen. Diese werden zumehmend mit mathematischen Darstellungsmitteln repräsentiert.

- Grundvorstellungen sind nicht stabil und ein für alle mal gültig

Es handelt sich viel mehr um die Ausbildung eines Netzwerkes, was durchständige Ergänzung und Überarbeitung immer leistungsfähiger wird (vom Hofe, 2003).
Wie sich Grundvorstellungen im Allgemeinen ausbilden, hat vom Hofe in einem seiner früheren Werke in folgender Abbildung zusammengefasst.

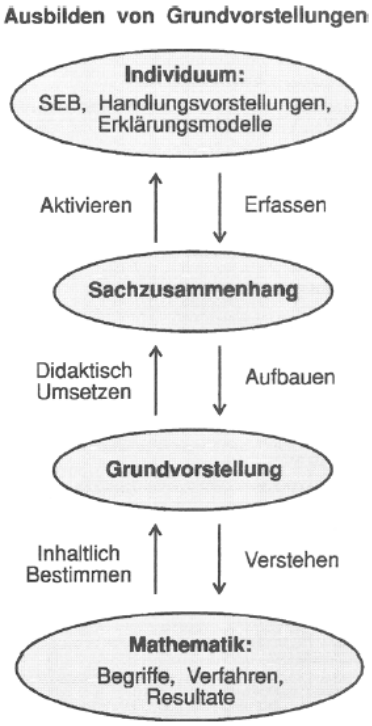


Abbildung 2 Ausbilden von Grundvorstellungen (nach Vom Hofe, 1992)

Auch hier wird noch einmal klar, dass durch Grundvorstellungen genau die Lücke zwischen dem Individuum selbst und der Mathematik an sich geschlossen wird und so ein Übergang geschaffen wird. Die Ausbildung von Grundvorstellungen ist wichtig, um neue Begriffe zu erfahren und deren Bedeutung zu erfassen. Dies soll durch Anknüpfung an bereits Bekanntes und an Vorerfahrungen geschehen. Anschließend werden neue mentale Modelle aufgebaut und die Repräsentation der neuen Begriffe auf der Vorstellungsebene ist möglich. Es soll im Anschluss daran möglich sein, diesen neuen Begriff wieder auf neue Sachsituationen anzuwenden (vom Hofe, 2003).
Der Aufbau der Grundvorstellungen hat im Schulalltag natürlich gewisse didaktische Konsequenzen. Im Lernprozess muss dafür gesorgt werden, dass eine Festigung von Fehlvorstellungen zu einem bestimmten Konzept verhindert wird. Dies kann zum

Beispiel durch mehr reflektierende Diskussionsphasen stattfinden, da den Schülern so ihre Grundvorstellungen bewusstgemacht werden und eine selbständige Reflektion von Fehlvorstellungen stattfinden kann. Gedankliche Konflikte sollten bewusst so oft wie möglich konstruiert werden, um eine Reflektion anzuregen. Ein behutsamer Umgang des Lehrers mit diesen Fehlvorstellungen und Fehlern ist außerdem wichtig. Zudem sollte darauf geachtet werden, dass nicht übermäßig viele Grundvorstellungen gleichzeitig neu aufgebaut werden müssen. Unter Betrachtung der vorherigen Abbildung wird außerdem klar, dass eine Nutzung vielfältiger Anwendungsbezüge besonders wichtig ist.

Bei der Unterrichtsplanung sind zwei didaktische Entscheidungen zu treffen. Zum einen die, welche Grundvorstellungen überhaupt - abhängig vom Inhalt - aufgebaut werden müssen. Zum anderen muss die didaktische Umsetzung festgelegt werden, das heißt beispielsweise der Sachzusammenhang konstruiert werden (Vom Hofe, 1992).

Im Rahmen der Arbeit wurde noch einmal allgemein auf Grundvorstellungen eingegangen - da, wie im Vorhinein erläutert - diese Grundlage des Lernprozesses und der Bildung neuer Begriffe sind. Es wird davon ausgegangen, dass die Grundvorstellungen der Schüler in Bezug auf Funktionen zwar für den alltäglichen Unterrichtsgebrauch ausreichend ausgebildet sind, sie aber gerade bei der Betrachtung von Koordinatensystemen zum Teil fehler- und mangelhaft sind. Schüler kennen nur die standardisierten Koordinatensysteme aus dem Buch und haben voraussichtlich Probleme mit den veränderten Darstellungen. Dies wird vor allem mit Verpflichtung des Einsatzes des Graphiktaschenechners zum Problem, wie im Kapitel über digitale Medien noch näher erläutert wird.

Dieses Kapitel hatte den Zweck, zu erläutern, welche Grundlagen bei den Schülern vorhanden sein müssen. Sie sind zum Zeitpunkt der Erhebung bereits mit Funktionen und den unterschiedlichen Darstellungsformen vertraut und können mit ihnen arbeiten. Nur so ist es möglich, das tiefergreifende Verständnis der Koordinatensysteme und Funktionen zu untersuchen. Funktionale Zusammenhänge und funktionales Denken sind ebenfalls ein essentieller Prozess, der im Rahmen der Überprüfung stattfindet. Der Themenbereich, unter dessen Grundlage das Projekt stattfindet, ist der der Funktionen. Im Rahmen der Untersuchung wird außerdem das Kennen von Darstellungen und die Fähigkeit eines Darstellungswechsels notwendig und auch überprüft. Oft ist der Wechsel von symbolisch zu graphisch nachzuvollziehen. Hier werden durch unterschiedliche

Skalierungen[2] und Ähnliches Konflikte geschaffen. Der Darstellungswechsel innerhalb eines Registers ist außerdem genau das, was bei einer Umskalierung der Achsen stattfindet. Aus denselben Gründen ist es auch wichtig, auf Kovariations-, Objekt- und Zuordnungsaspekt einzugehen. Auch hier entstehen durch die gemachten Veränderungen Konflikte. Die Notwendigkeit der Grundvorstellungen im Allgemeinen wurde weiter oben schon erläutert.

2.2 Digitale Medien im Schulunterricht

Es erfolgt nun eine genauere Erläuterung von digitalen und technischen Medien. Es wird darum gehen, die Relevanz für den heutigen Unterricht zu begründen und eine Verbindung zum fachdidaktischen Hintergrund in diesem Kontext zu schaffen. Außerdem wird über Probleme gesprochen, die Schüler bedingt durch die Verpflichtung von Graphiktaschenrechnern haben. Zudem wird die Rolle und der Nutzen des GTR innerhalb des Unterrichts, also einer Lernumgebung, erläutert.

2.2.1 Definition und Mehrwert digitaler Medien für den Schulunterricht

Nachdem im vergangenen Kapitel die fachlichen und didaktischen Grundlagen erarbeitet wurden, soll es nun darum gehen, darzulegen, welche Rolle digitale Medien im Lernprozess spielen und was in diesem Zusammenhang im täglichen Unterrichtsgeschäft zu beachten ist. Außerdem wird begründet, warum dieses Thema eine Rolle in dem hier durchgeführten Projekt spielt.

Es soll hier besonders um Computeralgebra- Systeme (CAS) gehen. Es handelt sich dabei um ein System, mit dem wissenschaftlich gerechnet werden kann, das heißt es werden „exakte, algebraische und symbolische Manipulationen algebraischer Ausdrücke ermöglicht“ (Barzel, 2012, S. 9).

Die Forderung, mehr digitale Medien in den Mathematikunterricht zu integrieren besteht schon seit geraumer Zeit. Erst 2012 kam jedoch der Erlass des Ministeriums für Schule und Weiterbildung, den graphikfähigen Taschenrechner (GTR) verbindlich in den Unterricht der Oberstufe zu integrieren. Dies gilt ab dem 1. August 2014; ab 2017 wird es zum ersten Mal Pflicht sein diesen im Abitur zu nutzen (Ministerium für Schule und Weiterbildung, 2012). Damit ist ein großer Meilenstein in der Mathematikdidaktik gelegt

[2] Mit Skalierungen ist die Einteilung der Punkte auf den Achsen gemeint, also Ihre Abstände und Größenordnungen. Standardskaliert ist ein Koordinatensystem auf dem y und x-Achse gleich skaliert sind

als dessen Konsequenz sich viele Neuerungen und Vorteile erhofft werden. Vor Allem besteht die Hoffnung darin, den Mathematikunterricht und die Schüler von Routineberechnungen zu entlasten, Graphen schnell visualisieren zu können und mit mathematischen Fragestellungen kreativer umgehen zu können (Ministerium für Schule und Weiterbildung, 2012).

Blickt man auf das Kapitel davor können gerade im Bereich der Funktionen GTR eine große Erleichterung bringen. Schüler können die Aspekte der Zuordnung und Kovariation besser erfassen und nachvollziehen, da Veränderungen quasi in „Echtzeit“ nachvollzogen werden können und nicht Schritt für Schritt auf dem Papier erfahren werden müssen (Malle, 2000). Vor Allem aber Darstellungswechsel können schnell und effizient vollzogen werden und die Auswirkungen von Veränderungen in der einen Darstellungsform auf die Andere können direkt gesehen werden (Laakmann, 2013). In der folgenden Abbildung ist dies noch einmal genauer zu sehen. Die Schüler können eine Veränderung in der graphischen Darstellungsform herbeiführen und die Auswirkungen direkt in den anderen beobachten. Eine Verbindung und Abhängigkeit der verschiedenen Darstellungsformen ist so leichter zu erkennen.

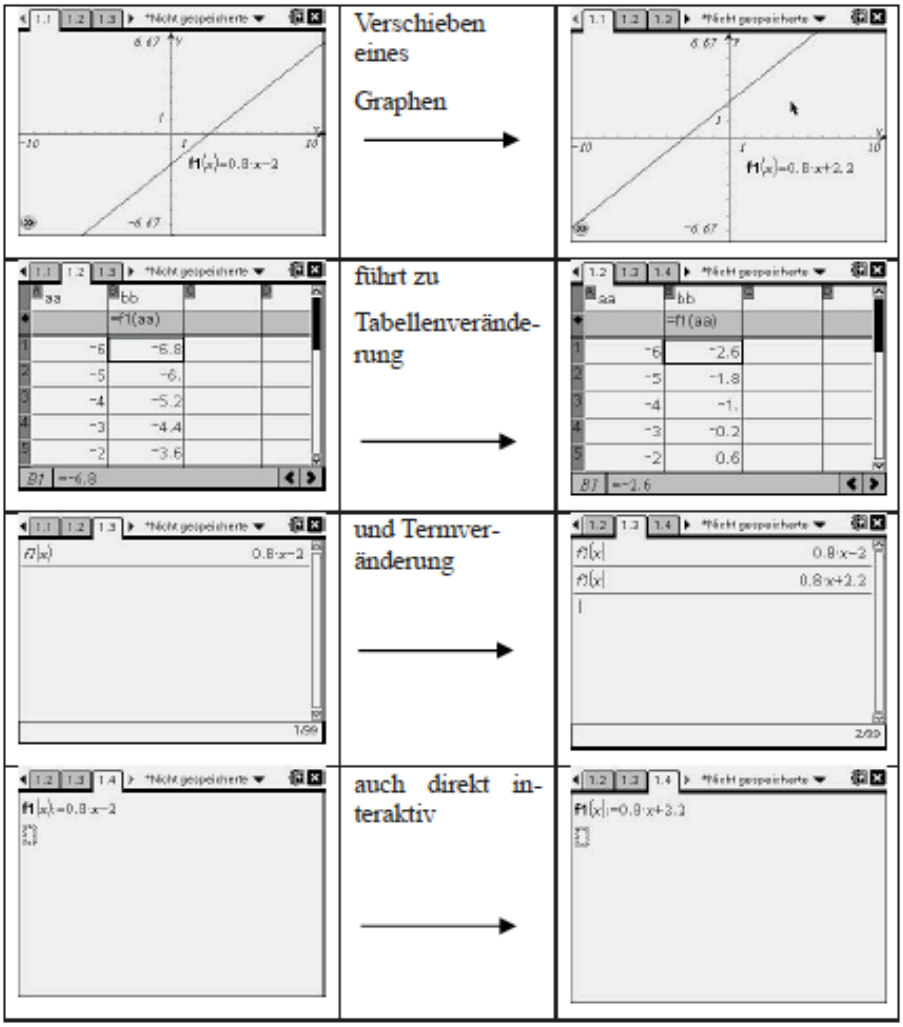


Abbildung 3 simultane Veränderungen in den Darstellungsformen anhand des GTR (nach Laakmann, 2013)

Auch beim Wechsel innerhalb der Darstellungsform (*treatment*) kann der GTR sinnvoll sein. Schüler können beispielsweise bei der veränderten Skalierung der Achsen direkt erkennen, welche Auswirkungen dies auf das Aussehen des Graphen hat (Laakmann, 2013). In Abbildung 4 ist dies noch einmal in Form des Fensters eines GTR zu sehen.

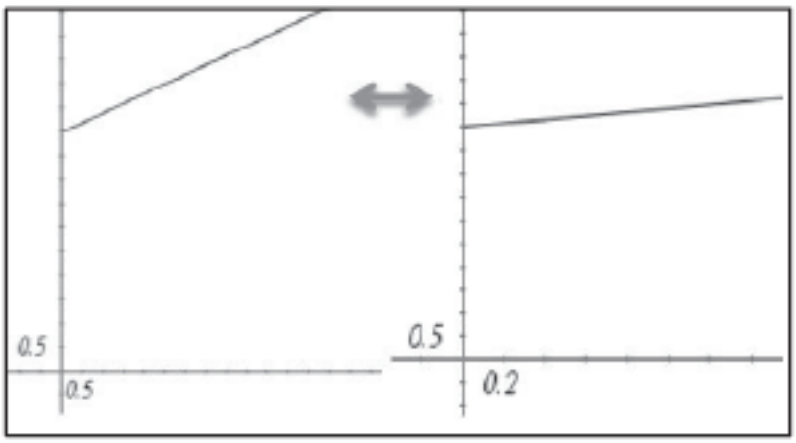


Abbildung 4 Auswirkungen des Wechsels innerhalb einer Darstellungsform (nach Laakmann, 2013)

Man sieht also, dass besonders das Themenfeld der Funktionen von der Einführung des GTR profitieren kann. Dadurch, dass das Zeichnen nicht mehr von Hand erfolgen muss, haben Schüler zudem die Möglichkeit mehr Erfahrungen an unterschiedlichen Beispielen zu machen.

Vorher war es notwendig, Beispiele so auszuwählen, dass keine Distraktoren auftraten, der Maßstab muss so angesetzt sein, dass etwas Sinnvolles gesehen wird, die Skalen sind symmetrisch und kritische Punkte müssen in dem gewählten Ausschnitt sofort erkannt werden. Durch die Einführung des GTR ergibt sich die Möglichkeit, auch *unschöne* Beispiele mit den Schülern zu betrachten und sie so mehr Erfahrungen machen zu lassen (Cavanagh & Mitchelmore, 2000a; Cavanagh & Mitchelmore, 200b). Außerdem ist es möglich, Ergebnisse in numerischer und algebraischer Form zu berechnen, die sonst nicht oder nicht in angemessener Zeit bearbeitet werden können und es lassen sich größere Mengen von Daten verarbeiten (Barzel & Greefrath, 2015).

Die Einführung des GTR hat neben den neuen Möglichkeiten, die sich für den Unterricht bieten auch Konsequenzen. Zum einen müssen die Unterrichtsinhalte angepasst werden, um zu garantieren, dass wirklich ein Vorteil entsteht. Zum anderen hat die Einführung auch Konsequenzen für die didaktische Seite des Unterrichts.

2.2.2 Didaktische Konsequenzen und neue Probleme

Inhaltlich muss nun darauf geachtet werden, dass durch den GTR keine Rückschritte gemacht werden. Bei einer klassischen Kurvendiskussion zum Beispiel wäre dies der Fall. Bei offeneren Aufgaben hingegen, die vorgehensorientiert sind und Reflektionen und Experimente oder Erkundungen erfordern, wird der GTR zum Vorteil (Barzel & Greefrath, 2015). Es ist offensichtlich, dass es so zu einer Verschiebung der Inhalte kommt, manche Dinge sind dadurch erst möglich, andere werden durch den GTR überflüssig und wieder andere müssen verändert werden (Barzel, 2012).

Aus didaktisch-methodischer Perspektive ist zu berücksichtigen, die Inhalte und Aufgaben so anzupassen, dass für die Schüler Erfahrungen möglich gemacht werden können. Außerdem ist es nun mehr möglich, schülerzentrierte Methoden zu nutzen und den Schülern mehr Eigenverantwortung und Selbstkontrolle zuzutrauen (Barzel, 2012; Barzel & Greefrath, 2015).

Um konkrete Anregungen für die Unterrichtsdurchführung zu geben, erörtert Laakmann verschiedene didaktische Prinzipien die durch den Einsatz des GTR eine größere Rolle

spielen können. Da diese zum Teil in der Umsetzung des Projektes eine Rolle spielen, sollen diese hier nun kurz erläutert werden.

- Window-Shuttle-Prinzip

Es geht dabei um die verschiedenen Darstellungsformen und die Tatsache, dass ein GTR den Vorteil hat, dass man die Veränderungen in der einen Darstellungsebene direkt in der anderen beobachten kann. So können Schüler diese besser miteinander vernetzen.

- Modulprinzip

Mit Modulen sind in diesem Fall einzelne Elemente des Lernens gemeint, die für verschiedene Probleme genutzt werden können. So kann ein relativ komplexes Gesamtproblem in mehrere Teilprobleme geteilt werden und so Schritt für Schritt erarbeitet werden. Duch CAS und GTR werden diese einzelnen Module direkt zur Verfügung gestellt. Zum Beispiel kann durch die Trace-Funktion der Graph *abgelaufen* und es können gleichzeitig entspechende Koordinaten angezeigt werden.

- White-Box-Black-Box-Prinzip

Dieses Prinzip setzt im Unterricht ohne GTR an. Verfahren und Prinzipien werden zuerst per Hand gelernt und anschließend auf den GTR übertragen. Schüler lernen also zunächst einen Algorithmus und verwenden erst den Taschenrechner, wenn das Wie und Warum verstanden sind.

- Black-Box-White-Box-Prinzip

Hier sind nun die Phasen vertauscht und es wird erst mit Hilfe des Rechners geforscht und Erfahrungen gemacht, bevor die dahinter steckenden Phänomene und Algorithmen erarbeitet werden.

- Gerüstdidaktik

Wie beim Black-Box-Prinzip haben die Schüler hier eine Thematik vorliegen, die noch nicht erschlossen wurde, sie haben allerdings ein Gerüst zur Verfügung, an dem sie sich *entlanghangeln* können, um die Inhalte zu verarbeiten (Laakmann, 2013).

Mit dem Einzatz des GTR entstehen auch Probleme im Unterrichtskontext, die zum Teil Anlass der Durchführung des Projektes dieser Arbeit sind. Diese werden im Folgenden erläutert:

Zuerst besteht die Gefahr, dass durch die beliebige Erzeugung von Beispielen zu einem gewissen Thema eine Unübersichtlichkeit entsteht. Es kann zu einer Ziellosigkeit im Arbeitsprozess führen und birgt die Gefahr, dass die eigentlichen Absichten aus den Augen verloren werden. Die große Anzahl führt zudem oft dazu, dass Graphiken nur oberflächlich wahrgenommen und durch die Möglichkeit Fehler schnell zu beheben, die

Graphen und Gründe für ihr Aussehen nicht mehr interpretiert und reflektiert werden. Zuletzt ist es möglich, dass die hilfsmittelfreien Fähigkeiten verloren gehen. Diesen Problemen muss im Unterricht aktiv entgegengewirkt werden, zum einen durch das aktive Anregen von Reflexionen, zum anderen durch bewusste Förderung der rechnerfreien Fähigkeiten (Barzel & Greefrath, 2015).

Cavanagh und Mitchelomore haben sich mit den Auswirkungen des Einsatzes von GTR auseinandergesetzt und Probleme wie Fehlvorstellungen von Schülern herausgestellt, die dieser zu Tage bringt. Dadurch, dass die Schüler mehr Erfahrungen an mehr Beispielen machen können, und die Betrachtung komplexerer Graphen möglich ist, besteht die Gefahr der Entwicklung von fundamentalen Fehlvorstellungen. Außerdem stehen die Schüler vor Problemen wie asymmetrischen Skalen, leeren Fenstern und Graphen, die nicht zu Funktionen passen. Dies sind Probleme, die mit den früheren idealen Beispielen gar nicht erst zu Tage gekommen sind.

Um diese Probleme weiter zu untersuchen, führten die Autoren Interviews mit 25 Schülern durch, in denen diese Aufgaben zu lösen hatten, die auf diese Probleme abzielten. Beispielsweise war der Graph durch einen falschen Fensterausschnitt so dargestellt, dass er auf den ersten Blick nicht mit der gegebenen Funktion übereinstimmte. Eines der Hauptprobleme, das sich im Rahmen dieser Studie herausstellte war das mangelnde Verständnis der Skalierung und des Maßtabs, was dazu führt, dass Schüler Graphen nicht richtig interpretieren und verstehen können. Ein weiterer Problembereich waren Approximationen. Den Schülern fiel es oft schwer, numerische Annäherungen für die Werte zu finden, die sie suchten. Das führte dazu, dass sie zum Teil Antworten gaben, die in keinem numerischen Zusammenhang mit dem lagen, was der abgebildete Graph ihnen anzeigte.

Außerdem ist eine große Schwierigkeit, dass die Schüler das, was ihnen angezeigt wird, nicht hinterfragen. Wird ihnen zum Beispiel aufgrund des Fensterausschnittes ein linearer Graph angezeigt, übernehmen sie diesen häufig, ohne zu überlegen, ob er zum Term passt. Auch allgemein fällt den Schülern die Verbindung zwischen dem Frunktionsgraphen und anderen Repräsentationsformen schwer. Schlussendlich ist es auch zum Teil ein Problem, dass der Bildschirm eine geringe Auflösung hat, daher also zum Beispiel ein Stück gerade anzeigt wird, was eigentlich eine Krümmung hat. Dies zu erkennen und auf die Pixel zu schieben fällt Schülern oft schwer. Als Konsequenz sehen die Autoren die Notwendigkeit, eine wesentlich stärkere curriculare Ausrichtung auf diese Probleme zu schaffen. Schüler brauchen mehr Erfahrungen mit den Auswirkungen

des GTRs und müssen neues Handwerkszeug lernen (Cavanagh & Mitchelmore, 2000a; Cavanagh & Mitchelmore, 2000b; Mitchelmore & Cavanagh, 2000).

Es muss sichergestellt werden, dass die Schüler den GTR und seine Funktionen ausreichend verstehen und nachvollziehen können, wie gewisse Widersprüche zu Stande kommen. Verhindert werden muss zudem, dass sie das, was der GTR anzeigt einfach so akzeptieren ohne die Richtigkeit in Bezug auf die Aufgabe zu hintefragen.

Diese Probleme, die erst durch den Umgang mit dem GTR erst zu Stande kommen, sind einer der Gründe, warum dieses Projekt durchgeführt wird. Früher war es gar nicht nötig, sich mir verschieden skalierten Koordinatenachsen und Ähnlichem auseinanderzusetzen. Die verpflichtende Nutzung des GTR bringt die Notwendigkeit mit sich, ein viel tiefergreifenderes Verständnis von Koordinatensystemen aufzubauen als früher. Dafür ist außerdem die Beherrschung der Inhalte des vorhergegangenen Kapitels über Darstellungswechsel, und Grundvorstellungen noch viel wichtiger als zuvor. Eine Verknüpfung verschiedener Darstellungen kann nicht nur mit dem GTR konkret gefördert werden; sie ist durch seinen Einsatz auch noch notwendiger geworden, als es vorher der Fall war.

3 Zielsetzung und Forschungsfrage

Zu Beginn der Darstellung des theoretischen Rahmens wurde dargelegt, was die fachliche Grundlage dieser Forschungsarbeit ist. Thematisch befindet man sich im Bereich der Funktionen und des funktionalen Denkens. Diese Themen werden schon sehr lange im Schulunterricht behandelt und es gibt viele Forschungen zu den in diesem Kapitel dargelegten, fachdidaktischen Aspekten wie Darstellungswechsel und Grundvorstellungen. Durch die Einbindung technischer Medien in dem Mathematikunterricht werden diese Aspekte jedoch in ein neues Licht gerückt und müssen überdacht werden. Auch darauf wurde bereits im Kapitel über digitale Medien eingegangen.

Die eigentliche Motivation dieses Projektes ist daraus entstanden, dass durch die Einführung des GTR in den Schulalltag neue Probleme auf Schüler zukommen, die erst seit jüngerer Zeit von Relevanz sind. Schüler mussten sich früher nicht mit unterschiedlichen Skalierungen, anderen Koordinatenursprüngen und dadurch anders erscheinenden Graphen auseinandersetzen, da die betrachteten Beispiele alle so ideal gestaltet waren, dass diese Phänomene gar nicht auftraten. Bereits die Forschungen von Cavanagh und Mitchelmore, die im Kapitel über digitale Medien angesprochen wurden, geben einen Hinweis darauf, dass diesbezüglich Handlungsbedarf besteht.

Als Konsequenz ist das Ziel der hier dargelegten Arbeit daher die **Erstellung einer forschungsbasierten Lernumgebung zum Thema Funktionen mit besonderem Fokus auf dem konzeptuellen Verständnis von Koordinatensystemen als Konsequenz der veränderten Darstellungen durch graphikfähige Taschenrechner.**

Es geht darum eine Lernumgebung zu erstellen, die genau die zuvor dargelegte Problematik behandelt und den Schülern hilft, mit diesen neuen Hindernissen und Veränderungen umzugehen. Der Begriff Lernumgebung wird im Folgenden noch genauer spezifiziert. Es wird dargelegt, was darunter zu verstehen ist, was bei der Planung zu berücksichtigen ist und ein Blick auf mediengestützte Lernumgebungen geworfen. Die Nutzung des GTR wird in diesem Zusammenhang ebenfalls eine Rolle spielen. Schüler sollen neben dem grundsätzlichen Verständnis dieser veränderten Koordinatensysteme auch Wissen über den Umgang mit dem Taschenrechner in solchen Fällen erlangen. Zudem soll dieser als Mittel zur Erfahrung solcher Phänomene dienen.

Bevor auf die eigentlich entwickelte Lernumgebung, Methodik und Ergebnisse eingegangen wird, soll zunächst geklärt werden, was unter einer Lernumgebung zu verstehen ist.

4 Methodischer Hintergrund

4.1 Lernumgebungen

4.1.1 Definition und Charakterisierung

Der Kern des im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Projektes ist die entwickelte Lernumgebung, die in Folge des Vortests erstellt und im Anschluss daran getestet und überarbeitet wurde. Zunächst soll darauf eingegangen werden, was genau unter einer Lernumgebung im Rahmen dieser Arbeit zu verstehen ist und welche Elemente und Kriterien eine solche ausmachen. Zum Schluss wird auf die Begrifflichkeit der medialen Lernumgebung im Rahmen der Mediendidaktik eingegangen, da es eines der untergeordneten Ziele des Projektes war, den GTR aktiv als Medium in die Lernumgebung zu integrieren.

Reinmann-Rothmeier und Mandel definieren Lernumgebungen als ein „Arrangement von Methoden, Techniken, Lernmaterialien und Medien“ (Reinmann-Rothmeier & Mandl, 2001, S. 615f). Dieses ist durch die Qualität der Lernsituation charakterisiert und geprägt durch den sozialen Kontext. Außerdem spielen zeitliche und räumliche Faktoren (Klassenraumgestaltung, Temperatur etc.) eine Rolle (Reinmann-Rothmeier & Mandl, 2001). Man betrachtet also alle Faktoren, die geplant und zur Verfügung gestellt werden müssen, um ein Umfeld zu schaffen, in dem gelernt wird (Kuntze, 2006). Zusammenfassend ist eine Lernumgebung die Summe der Elemente, in die der Lernprozess eingebettet ist und die Einfluss darauf haben was und wie gelernt wird.

Methoden, Techniken und Materialien sind hier plan- und steuerbar, aber vor allem auch voneinander abhängig. Es ist aber zudem wichtig zu berücksichtigen, in welchem Kontext die Lernumgebung situiert ist, sei es sozial oder räumlich. Auch diese Faktoren haben Einfluss auf die Art und Weise, wie die Lernumgebung umgesetzt werden kann und muss. Als Grundziel einer Lernumgebung sollte immer im Vordergrund stehen, das Lernen der Akteure zu unterstützen. Bei der Abwägung der vorher erläuterten Einflussfaktoren sollte dies immer im Hinterkopf des Planers bleiben.

Reinmann-Rothmeier und Mandel sprechen außerdem davon, dass je nach Ziel eine unterschiedliche Planung der Lernumgebung stattfinden muss, die einen anderen Fokus in den Vordergrund rückt. Zuerst kann der Lerner selbst im Vordergrund stehen. Dies ist sinnvoll, wenn die Umgebungen stark an die Vorerfahrungen und das Wissen der Lerner selbst anknüpfen und deren Interessen in den Vordergrund gestellt werden sollen.

Zweitens kann das Wissen in den Vordergrund rücken, wenn es hauptsächlich um den Gegenstand und seine Struktur gehen soll und Kenntnisse und Verstehen gefördert werden sollen. Drittens können Lernumgebungen so ausgelegt werden, dass Bewertungen im Vordergrund stehen. Dies ist in solchen der Fall, in denen die Aufmerksamkeit auf Verfahren zur Bewertung und Feedback liegen. Schließlich kann der Fokus einer Lernumgebung auf der Gemeinschaft liegen, indem zum einen die Entwicklung der Lerngemeinschaft gemeint sein, zum anderen aber auch die Öffnung der Institution selbst in die umgebende Umwelt im Fokus stehen kann (Bransford, Brown & Cocking, 1999, zit. nach Reinmann-Rothmeier & Mandl, 2001).

Bei der Erstellung einer solchen Lernumgebung ist es Aufgabe des Lehrenden, diese so vorzubereiten, dass der angestrebte Effekt erzielt wird. Dies schließt die Inbezugname aller erwähnten Einflussfaktoren mit ein und beinhaltet zum Beispiel die Vorbereitung und Bereitstellung der Medien und Materialien und die Aufbereitung dieser in bezüglich der die Lerngruppe und andere Kontextbedingungen. Die Elemente der Lernumgebung müssen den Lernenden sowohl didaktisch als auch rein physisch verfügbar gemacht werden, um den angestrebten Lernerfolg zu erzielen (Kerres, 1999).

4.1.2 Lernumgebungen aus mediendidaktischer Sicht

Wird die Lernumgebung aus dem Blickwinkel der Mediendidaktik nun weiter spezifiziert, bleiben die verschiedenen Einflussfaktoren zunächst die gleichen. Hinzu kommt jedoch, dass nun ein spezieller Fokus auf digitalen Medien liegt. Eine mediale Lernumgebung charakterisiert sich zusätzlich durch unterschiedliche Arten von Medien und Hilfsmitteln, die zum einen so aufbereitet worden sind, dass sie einen Lernprozess anregen und zum anderen die Eigenaktivitäten der Lernenden fördern (Kerres, 1999). Es ist also darauf zu achten, dass die Medien tatsächlich aktiv und zielführend werden und nicht nur als Mittel zum Zweck eingesetzt werden.

Medien können im Lernprozess selbst eine Vielzahl von Funktionen einnehmen. Die folgende Aufzählung fasst die Funktionen zusammen, die Kerres in seiner Ausarbeitung für relevant hält:

- Lernmotivierende Funktion
- Wissens(re)präsentation durch Medien: Darstellende Funktion
- Wissens(re)präsentation durch Medien: Organisierende Funktion
- Steuerung und Regelung von Lernprozessen durch Medien
- Werkzeug zur Unterstützung der Wissenskonstruktion

- Werkzeug zur Unterstützung interpersoneller Kommunikation
  (Kerres, 1999, S. 5)

Kerres betont außerdem die Relevanz des vermehrten Einsatzes von digitalen Medien im Unterricht und rechtfertigt dies damit, dass diese heutzutage in allen Bereichen der Forschung und Gesellschaft eine Rolle spielen und somit eine Auseinandersetzung so früh wie möglich stattfinden sollte. Es ist also wichtig, mediale Lernumgebungen - also Lernumgebungen, deren Bedingungen auf Grundlage technischer Medien geschaffen worden sind - immer mehr in den Unterrichtsalltag zu integrieren (Kerres, 1999).
Lernumgebungen bezeichnen also das Zusammenspiel aller Faktoren, die für das Lernen wichtig sind. Diese und deren Zusammenspiel müssen bei der Konzeption in Betracht gezogen werden und gegeneinander abgewogen werden. Natürlich ist eine Lernumgebung nie ganz planbar und ein gewisses Maß an Spontanität und Variabilität sollte immer im Hinterkopf behalten werden. Es handelt sich nicht zuletzt um ein Umfeld mit lebendigen, spontan reagierenden Akteuren und Umwelteinflüssen, die nicht vollends in allen Varianten bedacht werden können.
Im Folgenden wird nun auf die verwendete Methode eingegangen, sowie der Ablauf des Projektes und dessen Ergebnisse dargestellt.

4.2 Methode: Design-Based-Research

Das im Rahmen dieser Masterarbeit durchgeführte Projekt wurde in Form eines *Design-Based-Research* (DBR) Projektes durchgeführt. Im Folgenden wird dieser Begriff erläutert und es wird dargelegt, welche Charakteristika hier von Bedeutung sind. Die Folgen für Forscher und andere Teilnehmer werden im Anschluss daran ausgeführt. Außerdem wird zu Beginn darauf eingegangen, wie sich dieser doch recht neue Ansatz entwickelt hat und welche Gründe es für die Abwendung von den traditionellen Forschungsmethoden gibt. Diese Ausführungen münden dann in der Rechtfertigung für die Wahl dieser Methode in dem hier bearbeiteten Kontext.

4.2.1 Historische und aktuelle Entwicklungen

Ann Brown war eine der Ersten, die die Notwendigkeit sah, die traditionellen Forschungsmethoden weiterzuentwickeln und an aktuelle Umstände anzupassen. Dies bedeutete, dass ein Weg von Laborsettings hin zu Forschungsmethoden im realen Schulkontext gefunden werden musste. Das hat den Grund, dass sich im Laufe der Zeit sowohl Lerninhalte als auch andere Aspekte eines Lernumfeldes geändert haben und stark

voneinander abhängen. Dies hat die Notwendigkeit neuer Methoden und einer Anpassung der Forschung zur Folge. In Klassenräumen existiert heute eine weit größere Vielfalt an Methoden und Lernweisen, die einen stärkeren Einfluss auf die Lernergebnisse haben als früher. Forschungsmethoden, die das Lehren und Lernen untersuchen wollen, müssen sich also diesem Umstand anpassen (Brown, 1992). Seit Browns Ausführungen hat die DBR-Methode nach und nach immer mehr Einzug in den Forschungsalltag gehalten.
Mit Blick auf den heutigen Schulalltag ist der Einzug digitaler Medien eine der gravierendsten Veränderungen. Es gibt viele Ansätze das Lernen mit technischen Medien in den Schulalltag zu integrieren um diesen zu innovieren. Reinmann gibt hier e-Learning als Beispiel, aber auch der Einzug der, für dieses Projekt relevanten, Graphiktaschenrechner in den Unterricht kann als Versuch einer Innovation des Schulalltags bezeichnet werden. Die Autorin führt außerdem an, dass ursprünglich geplante Innovationen im täglichen Unterrichtsgeschäft oft erfolglos bleiben und schiebt dies unter anderem auf die klassische Forschung. Sie argumentiert, dass die recht radikalen Forderungen durch klassische Forschung oft erfolglos bleiben und behauptet, dass revolutionärere Innovationen dem Bildungskontext besser gerecht werden (Reinmann, 2005). Eine solch angeführte Argumentation kann bereits zu einem DBR-Ansatz führen, da die Charakteristika dieser Methode diesen Anforderungen in die Hand spielen. Im Folgenden werden diese näher erläutert und somit gleichzeitig eine Abgrenzung zu den traditionellen Methoden geschaffen.

4.2.2 Charakterisierung und Eigenschaften

Anderson definiert in seinem Werk *Design-Based-Research* folgendermaßen:

> *„DBR is a methodology designed by and for educators that seeks to increase the impact, transfer, and translation of education research into improved practice. In addition, it stresses the need for theory building and the development of design principles that guide, inform, and improve both practice and research in educational contexts.“ (Anderson & Shattuck, 2012, S. 16)*

Es handelt sich also um eine Methode, die explizit für Lehrende gestaltet wird. Zudem sind hier Forscher selbst Lehrende, also im Bildungskontext direkt tätig. Außerdem liegt ein besonderer Fokus darauf, die Bildungsforschung in den realen, schulischen Kontext zu integrieren und sowohl die Forschung selbst zu verbessern, als auch Theorien zur Verbesserung des Schulischen Kontexts zu schaffen.

Gerade dieser Zusammenhang und Übergang zwischen Forschung und Schulalltag wird von vielen Autoren speziell als Charakteristikum angesprochen, welches DBR von den herkömmlichen Methoden abgrenzt. Schon Brown spricht davon, bereits im Forschungsprozess alle Aspekte des täglichen Lebens einzubeziehen und somit eine Abwendung von den sonst vorgezogenen Laborsettings zu bezwecken. Dies wird dann zu praxisnäheren Ergebnissen führen. Dadurch, dass sich klassische Methoden eher auf den Lernprozess einzelner Schüler beziehen und nicht die vielen anderen Faktoren einbeziehen, denen dieser währenddessen ausgesetzt ist, ist eine Praxisnähe hier eher selten zu finden (Brown, 1992). Schenkt man der Behauptung der Kontextrelevanz Glauben, so liegt die Erkenntnis nahe, dass in Laborsettings untersuchte Zusammenhänge bei dem Übergang in den Alltag Mängel aufweisen. Daher ist die Befassung mit dem Nutzen neuer Methoden sicher gerechtfertigt. Das Lernen an sich kann nur verstanden werden, wenn alle Einflussfaktoren mit einbezogen werden und genau dies ist durch DBR versucht worden zu sichern (Kelly, 2003). Durch die Praxisnähe ist zuletzt auch die Validität der Studie gesichert und das herausgestellte Ergebnis kann tatsächlich im Alltag genutzt werden, um die Praxis zu verbessern (Barab & Squire, 2004; Anderson & Shattuck, 2012)

Ein weiterer Aspekt, der neben der Praxisnähe DBR charakterisiert, ist das Design selbst. Dieses hat einen besonderen Fokus im Forschungsprozess. Zunächst einmal wird das Forschungsdesign direkt auf ein konkretes Problem hin entwickelt (*„designed“*) und nicht, um Probleme herauszustellen. Im konkreten Forschungsprozess wird nun zunächst eine Theorie beziehungsweise Problemstellung festgestellt, woraufhin dann von den Forschern selbst ein konkretes Design entwickelt wird. Diese oft frühe Version des Designs wird dann im besagtem realen Kontext getestet. Die dabei entstehenden Probleme werden dokumentiert, worauf eine Verbesserung des Designs stattfindet. Der Forschungsprozess an sich ist dadurch stark um das Design selbst zentriert (Joseph, 2004). Ein theoretischer Ablauf eines solchen Prozesses ist in folgender Abbildung, die nach dem Artikel von Reinmann gestaltet ist, zu sehen.

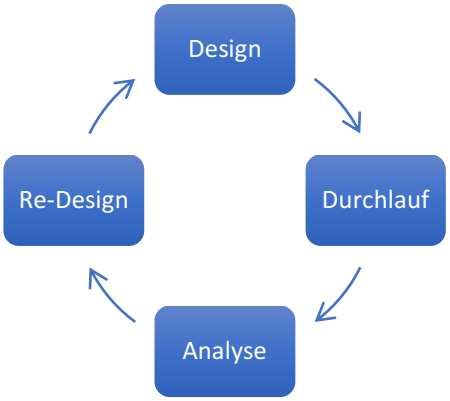


Abbildung 5 Theoretischer Ablauf eines DBR-Forschungsprozesses (modifiziert nach Reinmann, 2005)

Ein Projekt läuft so ab, dass zunächst ein Design entwickelt wird, welches anschließend in einem realen Kontext durchgeführt und getestet wird. Daraufhin wird der Ablauf und die Durchführung analysiert, um Probleme und Verbesserungen herauszustellen. Im Re-Design werden diese dann Umgesetzt. Je nach Größe des Projektes kann dann eine erneute Durchführung erfolgen und der Prozess wiederholt sich.

Die Forschung ist also iterativ gestaltet und basiert immer stark auf vorherigen Forschungsergebnissen, was letztendlich zur Folge hat, dass die Ergebnisse direkt nutzbar für die Praxis sind, womit der Aspekt der Praxisnähe wieder betont wird. Außerdem hat die frühe Bewertung des Designs eine schnellere Entwicklung und schnellere Ergebnisse zur Folge, selbst wenn diese noch nicht ganz perfekt sein mögen (Joseph, 2004). Weitere Charakteristika sind das Nutzen von *mixed methods* und die große Vielfalt an Werkzeugen und Techniken (Anderson & Shattuck, 2012).

4.2.3 Abgrenzung zur traditionellen Forschung

Die Erläuterung der Charakteristika von DBR hat zum Teil schon herausgestellt, wo die Unterschiede zu traditionellen Forschungsmethoden liegen. So ist es zum Beispiel eigentlich üblich, die Lernenden in einem Laborsetting zu beobachten und nicht in ihrem natürlichen Lernumfeld. Auch die aktive Rolle der Forscher in der Entwicklung und Durchführung des Designs, auf die später noch eingegangen wird, ist in traditioneller Forschung häufig nicht zu finden. Aus der Situierung im realen Kontext folgt ein weiterer Unterschied, da so eine Reihe von voneinander abhängigen Variablen in die Theoriebildung miteinbezogen werden muss, die in einem herkömmlichen Setting gar nicht auftreten. Frühere Forschungen befassen sich oft nur mit einer einzelnen Variable. Das Ziel von DBR ist auch eher das Erfassen der Situation selbst und nicht die Identifikation neuer Variablen. Auch die soziale Interaktion ist sowohl bei Forschern als

auch bei den Lernenden selbst viel ausgeprägter und die Teilnehmer gelten nicht nur als Subjekte der Forschung. Vor allem aber ist es nicht allein das Ziel Theorien zu entwickeln, sondern aktiv auf lokalem Level für Änderungen zu sorgen (Barab & Squire, 2004).

4.2.4 Veränderte Rolle des Forschers und der Lernenden

Wie bereits erwähnt ist die Rolle des Forschers selbst eine ganz andere als in der traditionellen Forschung. Dies soll hier noch einmal genauer erläutert werden: Bereits aus der Tatsache, dass das Design selbst im Fokus steht, folgt, dass der Forscher beim DBR auch die Rolle des Designers übernimmt und aktiv in den Prozess eingreift, anstatt nur zu beobachten (Barab & Squire, 2004). Dadurch wird auch ein enger Kontakt zu den eigentlichen Bildungspraktikern nötig, den man als konventioneller Forscher nicht unbedingt herstellen muss. Diese Zusammenarbeit hat den Vorteil, dass auf der einen Seite die praktischen Probleme von den Forschern verstanden werden, andererseits aber auch die Ziele der Forschung von den Praktikern verstanden werden. Sie profitieren also gegenseitig von dem Expertenwissen des Anderen. Probleme können schneller gelöst werden und man kann sich auf die Kernfragen konzentriert werden kann (Joseph, 2004; Anderson & Shattuck, 2012).

Durch die angesprochene Rollenveränderung des Forschers gibt es aber auch einige Aufgaben, die die neue Rolle zur Folge hat. Es ist vor allem wichtig, dass der Designprozess und die investierte Zeit, das Engagement und die Umstände genauestens dokumentiert werden. Zum einen damit das resultierende Designprodukt verstanden wird, zum anderen, damit der Leser beurteilen kann, ob er sich zutraut, Ähnliches zu erreichen (Anderson & Shattuck, 2012). Diese Dokumentation des Gestaltungsprozesses sieht Reinmann zudem als weiteres wichtiges Merkmal der Forschungsmethode selbst (Reinmann, 2005). Dadurch das der Forscher selbst zum Designer wird, müssen für die Realisierung des Ablaufes und den Erfolg der Studie eine Reihe neuer Entscheidungen getroffen werden, wie zum Beispiel, wie es im Projektablauf weitergeht. Außerdem muss bedacht werden, was genau adressiert wird und welche Veränderungen vorgenommen werden. Diese Entscheidungen müssen bestmöglich getroffen werden und in Bezug auf den Kontext ständig angepasst werden (Edelson, 2002). Es ist also eine viel aktivere Teilnahme seitens der Forscher nötig, als wenn nur ein im Vorhinein geplanter Ablauf durchlaufen werden würde und der Druck auf den Forscher ist während des Prozesses weitaus höher als herkömmlich.

Abschließend soll noch ein Wort über die Rolle der Schüler verloren werden, wobei diese eigentlich auch durch die Charakteristika der Methode implizit beschrieben wurden. Ihre Rolle verändert sich insofern, dass sie nicht mehr in Laborsettings als Forschungsobjekte fungieren, sondern sich in ihrem gewohnten Lernumfeld befinden. Schüler sind als Teilnehmer der Studie in ihrem gewohnten Umfeld. Dies wird sicherlich ihr Verhalten beeinflussen. Zudem sind sie insofern aktiv an der Gestaltung beteiligt, dass auf ihre Erfolge und Reaktionen hin das Design überarbeitet wird und sie so nicht nur Objekte der Forschung sind.

4.2.5 Kritikpunkte und Schwierigkeiten

Natürlich wirft eine solche neue Forschungsmethode auch offene Fragen auf und bringt Herausforderungen mit sich, auf die hier nun eingegangen wird. Da gerade von der Innovation des Forschers in den Prozess und die Entwicklung gesprochen wurde, stellt sich die Frage, inwiefern dieser noch in der Lage ist, glaubhafte Aussagen zu treffen, wenn er in so großem Maße persönlich Teil des Ablaufes und der Planung ist. Anderson argumentiert hier, dass man davon ausgehen sollte, dass das so erlangte Insiderwissen aber auch viele Vorteile bringt und somit einen eventuellen Mangel an Subjektivität ausgleicht. Er betont weiterhin, dass eine so starke Innovation viel Enthusiasmus und Durchhaltevermögen seitens des Forschers verlangt.

Eine weitere Schwierigkeit wird darin gesehen, ein Ende zu finden: Durch die stetige Veränderung und Verbesserung läuft man Gefahr sich im Prozess zu *verrennen* (Anderson & Shattuck, 2012). Zudem ist es eine Herausforderung, das Design in seiner Komplexität und Vielfältigkeit so darzustellen, dass es am Ende auch einen Nutzen für Andere hat. Es wird schwierig sein zu beweisen, dass die Ergebnisse relevant und generalisierbar sind, da die Forschung ja auf lokalerer Ebene stattfand als üblich. Das bedeutet auch, dass gezeigt werden muss, dass eine Expansion über den Kontext hinaus möglich ist und das Design und die Ergebnisse auch in anderen Kontexten funktionieren (Edelson, 2002; Barab & Squire, 2004). Auch nicht unbeachtet sollte die lokale Schulkultur sein, die natürlich immer Herausforderngen an die Durchführung und Forschungen an sich stellt (Mingfong, J., San, & Ming, 2010). Zuletzt ist anzumerken, dass die Ergebnisse eines DBR-Projektes im Vergleich zur herkömmlichen Forschung keine statistischen Vertrauenslevel liefern (Edelson, 2002). Dies macht es ebenfalls schwierig, die Ergebnisse als allgemein gültig zu rechtfertigen.

Trotz dieser offenen Fragen und Herausforderungen kann gesagt werden, dass mit DBR eine neue Methode der Forschung gefunden wurde, die sich zum einen an die neuen Entwicklungen des Schulalltags anpasst. Zum anderen liefert sie Ergebnisse, die direkt in der Praxis nutzbar sind und somit eine gewisse Alltagstauglichkeit garantieren.

5 Praktische Durchführung des Projektes

5.1 Methodisches Vorgehen

Es soll nun der Ablauf des im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Design-Based-Research-Projektes geschildert werden, um einen Überblick über die stattgefundenen Prozesse zu geben.

Zu Beginn des Projektes wurde ein Vortest durchgeführt, um festzustellen, wo genau die Probleme und Fehlvorstellungen der Schüler in Bezug auf das konzeptuelle Verständnis von Koordinatensystemen liegen. Diese wurden anschließend ausgewertet.

Danach folgte das eigentliche Design, in diesem Falle handelt es sich um die erstellte Lernumgebung. Hierbei wurden die im Vortest erhobenen Ergebnisse berücksichtigt. Außerdem wurde der GTR in die Lernumgebung integriert, um einerseits den Umgang damit zu trainieren und andererseits zu lernen, mit den Veränderungen umzugehen, die dieser in Bezug auf Koordinatensysteme und Graphendarstellungen mit sich bringt.

Im Anschluss daran wurde die Lernumgebung in einer neuen Lerngruppe getestet und Probleme dokumentiert. Auch hier wurde noch einmal der selbe Test geschrieben, um den Lernzuwachs beurteilen zu können. Zur weiteren Beurteilung des Erfolges wurden Laufzettel der Schüler sowie die individuellen Eindrücke bei der Durchführung herangezogen.

Der letzte Schritt des Projektes umfasst die Überarbeitung der Lernumgebung als Konsequenz der Erhebung und das Aufzeigen von weiteren Forschungs- und Entwicklungsmöglichkeiten.

5.2 Vortest zur Problemanalyse

Im ersten Schritt des Design-Based-Research-Projektes wurde ein Vortest durchgeführt, um herauszufinden, welche Kompetenzen in Bezug auf das konzeptuelle Verständnis von Koordinatensystemen bereits vorhanden sind, oder wo gegebenenfalls noch Förderbedarf besteht. Um die Anonymität zu wahren, haben die Schüler zu Beginn einen Code nach einem bestimmten Muster generiert.[3]

Es wurde ein Aufgabenkatalog konzipiert, in dem jeweils verschiedene Veränderungen an den Koordinatensystemen variiert wurden. Dabei wurde sich bewusst dazu entschieden, den GTR beim Vortest nicht nutzen zu lassen, um zu verhindern, dass die

[3] Vgl. Anhang

Ergebnisse hinsichtlich der Schülervorstellungen verfälscht werden. Dieser wird erst in der eigentlichen Lernumgebung eine Rolle spielen.

Es wurde davon ausgegangen, dass die Schüler solche Variationen nicht aus ihrem Schulalltag kennen. Somit sollte im Anschluss an die Durchführung ihr Umgang damit untersucht werden. Diese Vermutung beruht auf der Tatsache, dass einerseits solche Veränderten Koordinatensysteme nicht explizit im Kernlehrplan gefordert werden. Auf die Kompetenzen, die der Kernlehrplan verlangt, wurde im fachdidaktischen Hintergrund bereits eingegangen (vgl. Kapitel 2.1.1). Zum anderen sieht man den Mangel solcher Variationen bereits, wenn man sich die heute gängigen Schulbücher und die dort genutzten Beispiele anschaut:

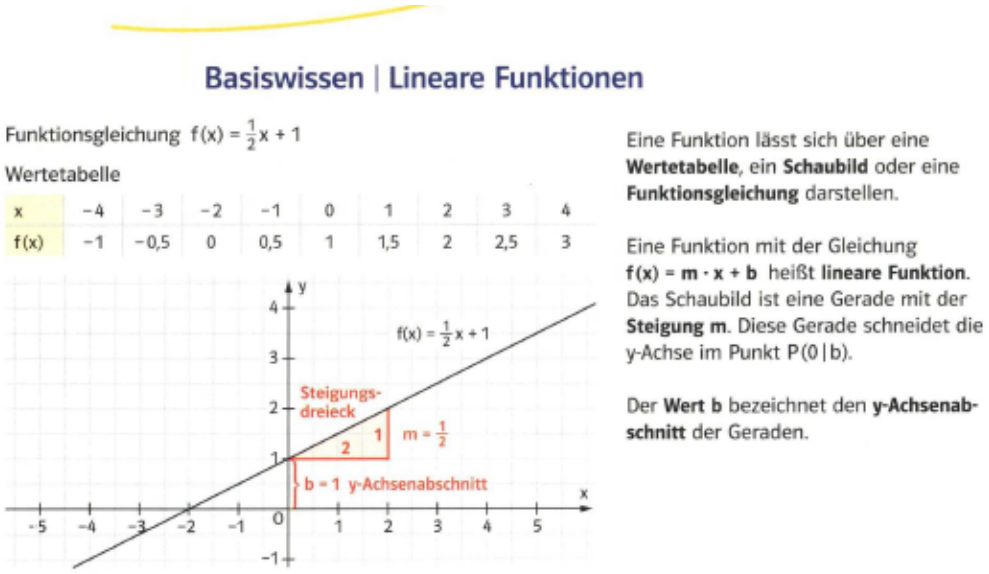


Abbildung 6 Schulbuchbeispiel 1 (Maroska, Olpp, Pongs, Stöckle, & Wellstein, 2009)

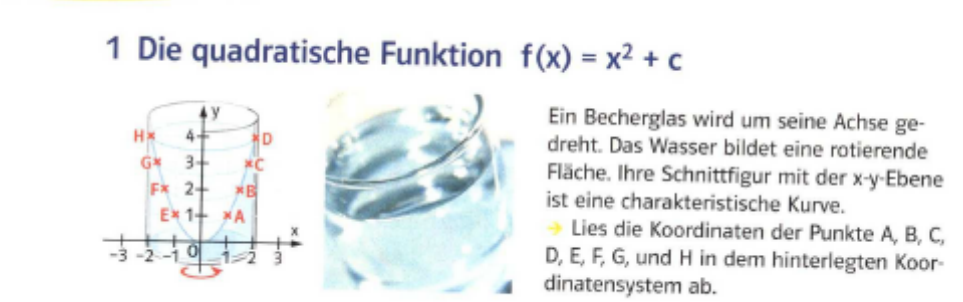


Abbildung 7 Schulbuchbeispiel 2 (Maroska, Olpp, Pongs, Stöckle, & Wellstein, 2009)

Die hier gegebenen Beispiele zeigen jeweils eine Wiederholung zu linearen Funktionen und die Einführung der quadratischen Funktionen. Bei beiden treten standardisierte Koordinatensysteme auf und dies zieht sich durch die ganze Unterrichtseinheit. Ähnliche Beispiele finden sich in allen gängigen Schulbüchern.

5.2.1 Kompetenzen und Vorstellung des Testinstruments

Die entwickelten Kompetenzerwartungen, die in dem Vortest überprüft wurden und deren Vorhandensein Grundlage der Lernumgebung ist, sind der folgenden Tabelle zu entnehmen.

Name	Die Schülerinnen und Schüler sind in der Lage...
1. Darstellungswechsel erkennen	...Darstellungswechsel innerhalb von Funktionen nachzuvollziehen und diese auf ihre Richtigkeit hin zu beurteilen
2. Grundvorstellungen Anwenden	...die Grundvorstellungen zum Thema Funktionen angemessen anzuwenden
3. Skalierungen erkennen	...unterschiedliche Skalierungen von Koordinatenachsen zu erkennen und deren Auswirkungen auf andere Darstellungsformen, durch geeignete Methoden, angemessen zu überprüfen (z.B. durch das Einsetzen von Werten). Dies erstreckt sich auch auf uneinheitliche Skalierungen[4].
4. Funktionen und Skalierungen nachvollziehen	...die unterschiedlichen Skalierungen sowohl bei linearen als auch bei quadratischen Funktionen nachvollziehen können
5. Veränderte Koordinatenursprünge erkennen	...eine Veränderung des Koordinatenursprungs und deren Auswirkungen auf die Darstellung der Funktion zu erkennen
6. Achsenskalierungen erstellen	...uneinheitliche Achsenskalierungen selbstständig und sinnvoll zu erstellen
7. Achsenskalierungen interpretieren	...Achsenskalierungen im Sachzusammenhang angemessen zu interpretieren

Tabelle 4 Grundlegende Kompetenzen des Vortests

Die ersten beiden Kompetenzen sind eher allgemein gefasst und werden in jeder Aufgabe indirekt mitgetestet. Grundvorstellungen und die Fähigkeit Darstellungswechsel zu

[4] Es sind ungleiche Skalierungen von x- und y-Achse gemeint, vgl. z.B. Aufgabe 1, Koordinatensystem 2 im Vortest

vollziehen sind Grundlage, um angemessen mit Funktionen umzugehen und ausreichendes Wissen aufzubauen. Haben Schüler bereits Probleme mit diesen Grundlagen, wird es ihnen schwerfallen, die hier getesteten Veränderungen nachzuvollziehen. Welche Grundvorstellungen und Darstellungswechsel bei jeder Aufgabe genau betrachtet werden, wird an den entsprechenden Stellen erklärt.

Die Kompetenz *Skalierungen erkennen* wird in denjenigen Aufgaben geprüft, die die Achsen in verschiedener Skalierung zeigen, zunächst einmal unabhängig davon, ob ein Funktionsgraph oder Sachzusammenhang mit einbezogen ist. Dies wird in den folgenden Kompetenzen genauer aufgeschlüsselt. Wann genau welche der spezifischen Kompetenzen zu tragen kommt, wird ebenfalls bei der Beschreibung der einzelnen Aufgaben genauer dargelegt.

Natürlich spielen immer mehrere Kompetenzen in jeder Aufgabe eine Rolle. Zum Teil wird nur die Wichtigste genannt, wenn daraus bereits klar wird, dass auch andere, vorangegangene Kompetenzen eine Rolle spielen. Ist zum Beispiel *Achsenskalierungen interpretieren* eine der grundlegenden Kompetenzen, wird davon ausgegangen, dass natürlich auch *Skalierungen erkennen* eine Rolle spielt.

Die einzelnen Aufgaben wurden so gestaltet, dass die Schüler jedes Mal Raum für ihre Begründungen und Gedanken hatten, um später einen besseren Einblick in ihre Theorien und Vorstellungen zu bekommen.

Im Folgenden wird nun auf die einzelnen Items eingegangen und deren Funktion näher erläutert.

Aufgabe 1

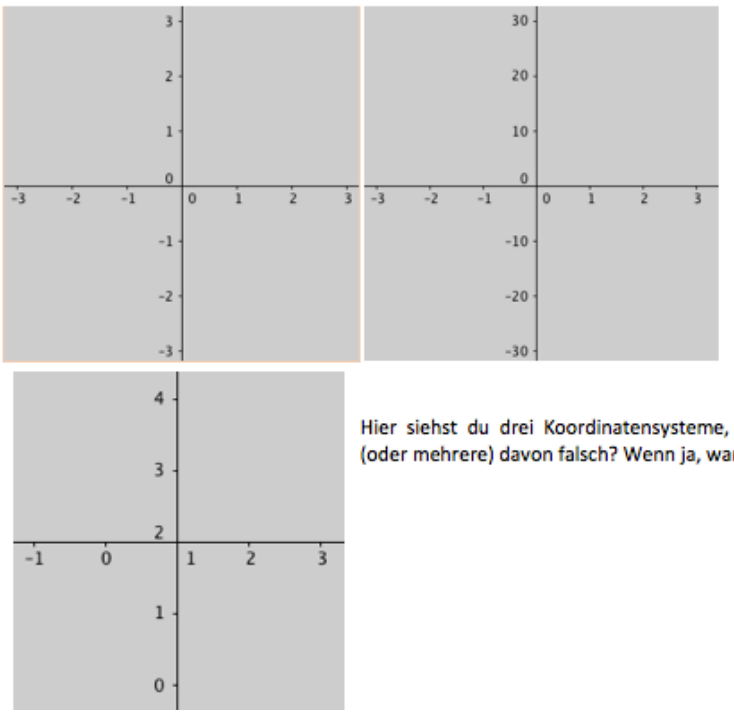
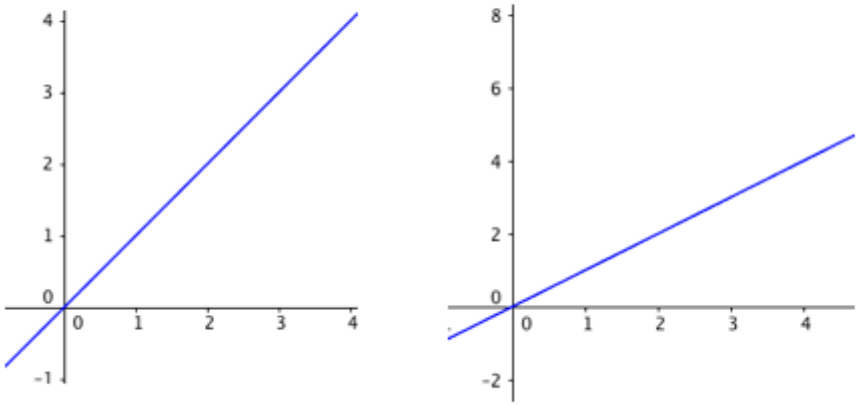


Abbildung 8 Aufgabe 1 des Vortests

Aufgabe 1 zeigt drei Koordinatensysteme (KS), das erste ist ein Standardkoordinatensystem, also eines mit regelmäßiger Skalierung und einem Ursprung bei (0/0). Bei dem zweiten KS sind die Skalierungen verschieden; die x-Achse ist in 1er Schritten, die y-Achse in 10er Schritten skaliert und beim dritten KS ist schließlich der Ursprung auf (1/2) verschoben. Darstellungsart und Grundvorstellung können hier nur indirekt benannt werden, da noch keine explizite Funktion betrachtet wird. Man befindet sich jedoch im Bereich der graphischen Darstellungsform, es muss jedoch noch kein Wechsel vollzogen werden. Durch die unterschiedlichen Skalierungen treten der Kovariations- und Zuordnungsaspekt ebenfalls nur indirekt in den Vordergrund, da auch ohne Funktionen die Achsen, und somit auch bestimmte Werte in Verbindung stehen. Insbesondere stehen hier die ersten drei der formulierten Kompetenzen im Vordergrund. Außerdem zielt das dritte Koordinatensystem auf die Kompetenz *Veränderte Koordinatenursprünge erkennen* ab. Die Lernenden sollen nun beurteilen, ob die KS falsch sind und ihre Gedanken begründen. Dieses Item dient dazu festzustellen, was für eine grundsätzliche Vorstellung die Schüler überhaupt haben und wie offen sie gegenüber den Variationen sind. Es ist zu erwarten, dass einige Schüler die Systeme 2 und 3 als falsch deklarieren, weil sie von ihrer Vorstellung abweichen beziehungsweise weil ihnen ein solche veränderten KS in ihrem Alltag noch nicht begegnet ist.

Aufgabe 2

Lisa behauptet, dass beide abgebildeten Graphen die Funktion $f(x) = x$ zeigen.



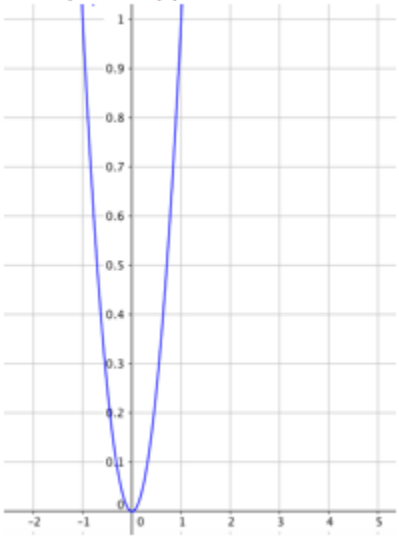
Was sagst du dazu? Begründe.

Abbildung 9 Aufgabe 2 des Vortests

Aufgabe 2 befasst sich mit dem Zusammenhang zwischen Koordinatensystem und Graph, und wie diese miteinander einhergehen. Bei dieser Aufgabe geht es zunächst um eine lineare Funktion, die durch verschiedene Skalierung der Achsen den Eindruck macht, als hätte sie eine andere Steigung, was aber bei genauerer Betrachtung der Achsen nicht der Fall ist. Es wird davon ausgegangen, dass die Schüler die beiden abgebildeten Funktionen zum Teil für zwei verschiedene halten. Zum einen muss ein Darstellungswechsel von symbolisch zu graphisch nachvollzogen werden, zum anderen müssen sie jedoch vor allem die unterschiedliche Skalierung der Achsen erkennen und richtig interpretieren. Zuordnungs- und Kovariationsaspekt sind hier nötig, um den Sachverhalt zu verstehen und richtig zu interpretieren. Neben den grundlegenden Kompetenzen wird hier ein besonderer Wert auf die Kompetenz *Funktionen und Skalierungen nachvollziehen* gelegt.

Aufgabe 3

a) Handelt es sich um die Normalparabel f(x) = x^2?



Begründe deine Entscheidung.

Abbildung 10 Aufgabe 3a des Vortests

Aufgabe 3 beschäftigt sich nun in Teil a mit einer quadratischen Funktion. Es geht darum, zu beurteilen, ob der abgebildete Graph zu der Funktionsgleichung passt, daher wird wieder ein Darstellungswechsel von symbolisch zu graphisch vollzogen. Außerdem wurde wieder eine Veränderung der Skalierung vorgenommen. Beachten die Schüler diese nicht, so scheint dies nicht die Normalparabel, sondern eine in y-Richtung gestreckte Parabel zu sein, was jedoch nicht der Fall ist. Auch hier sollen wieder die Entscheidungen begründet werden, damit in der Auswertung beurteilt werden kann, wo genau die Fehlvorstellungen liegen. Kovariations- und Zuordnungsaspekt spielen hier wieder eine Rolle, da das Zusammenspiel der x- und y-Werte hier für das Aussehen des Graphen unter Veränderung der Achsenskalierung zuständig ist. Auch hier steht besonders die Kompetenz *Funktionen und Skalierungen nachvollziehen* im Vordergrund.

b) Passt der abgebildete Graph zu der Funktionsgleichung $f(x) = \frac{1}{2}x^2$?

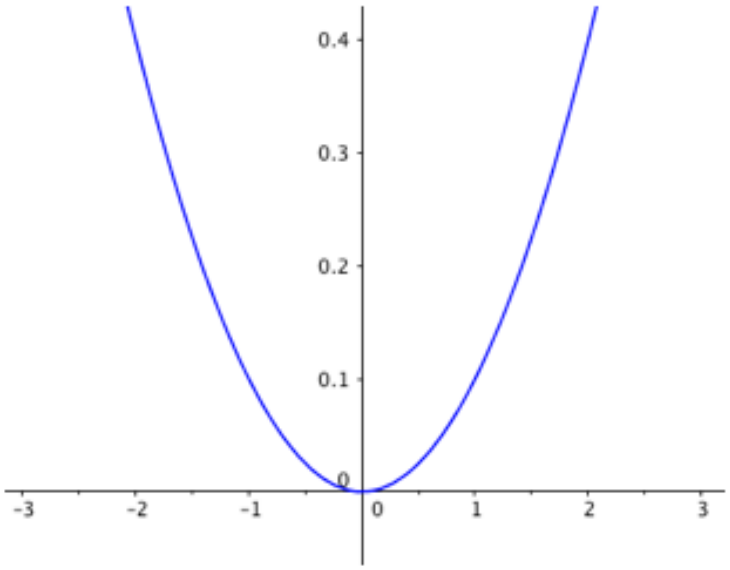
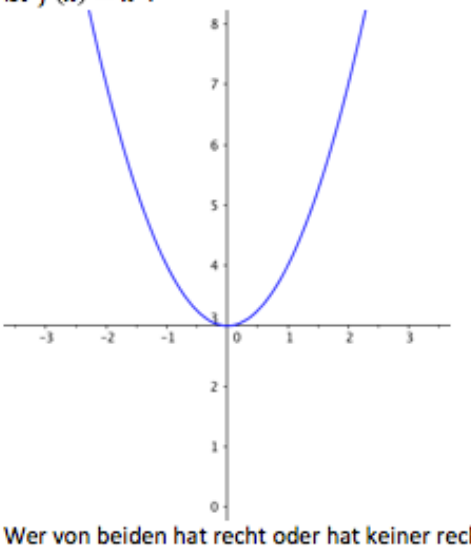


Abbildung 11 Aufgabe 3b des Vortests

Teil b hat eine ähnliche Intention, hier ist es nun aber so, dass der Graph nicht zu der Funktionsgleichung passt, er ihr aber durch veränderte Skalierung der Achsen ähnelt. Es sind dieselben Grundvorstellungen und Darstellungswechsel wie in Aufgabenteil a nötig. Auch ist dieselbe Kompetenz Grundlage der Aufgabe. Es soll festgestellt werden, inwieweit die Schüler den Zusammenhang zwischen Steigung und Skalierung erkennen, verstehen und wie sie mit dem erzeugten Konflikt umgehen.

Aufgabe 4

Paul behauptet, dass dieser Graph die Funktion $f(x) = x^2 + 3$ darstellt, Fritz sagt, es ist $f(x) = x^2$.



Wer von beiden hat recht oder hat keiner recht? Begründe deine Antwort.

Abbildung 12 Aufgabe 4 des Vortests

Aufgabe 4 greift nun noch einmal den veränderten Koordinatenursprung auf. Durch diese Veränderung wirkt der Graph, als existiere keine Verschiebung in y-Richtung. Es wird außerdem die richtige Option vorgegeben und die, nach der der Graph aussieht, wenn man den Ursprung nicht beachtet, richtig ist aber eigentlich der Vorschlag von Paul. Da Schüler im Unterrichtsalltag nicht auf solche Konflikte stoßen wird hier erwartet, dass einige die Veränderung gar nicht erkennen oder dies als fehlerhaft auffassen. Auch hier ist es wieder nötig, von symbolischer zu graphischer Darstellungsform zu wechseln. Es muss wieder die Abhängigkeit der einzelnen Größen betrachtet werden (Zuordnung), die Kovariation spielt in diesem Fall eine weniger große Rolle. Die Kompetenz *veränderte Koordinatenursprünge erkennen* steht im Vordergrund.

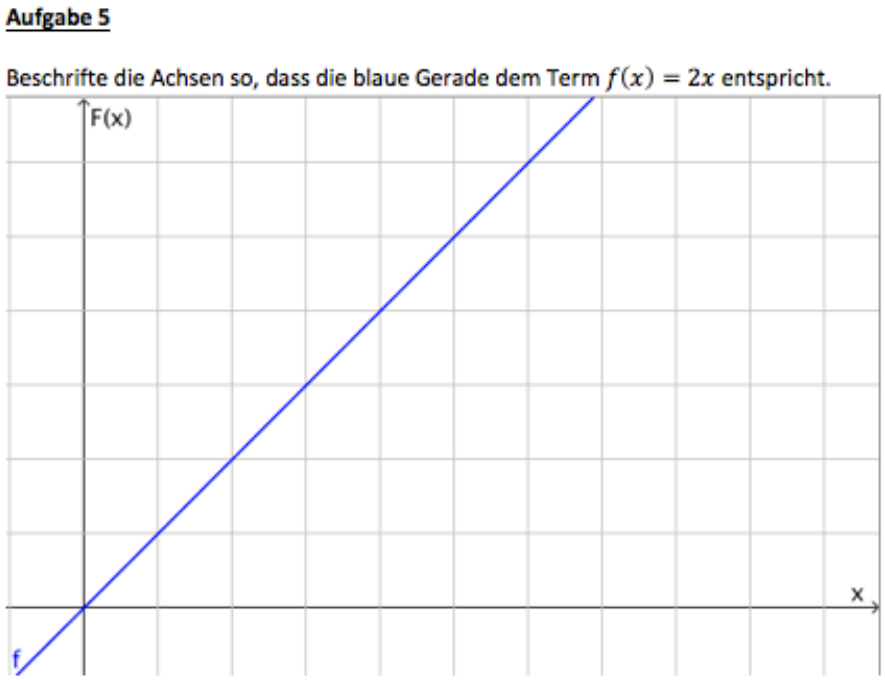


Abbildung 13 Aufgabe 5 des Vortests (in Anlehnung an Klinger & Thurm, 2016)

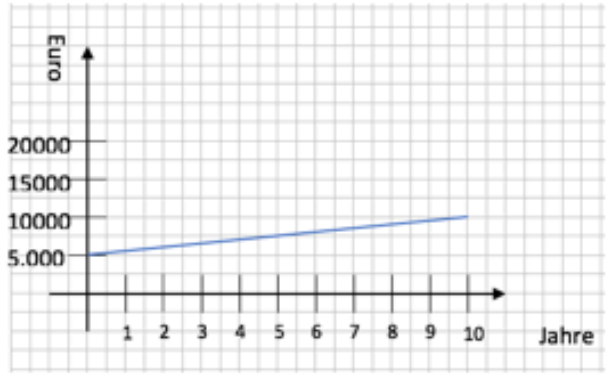
Die fünfte Aufgabe wurde in Anlehnung an ein Item aus der Erhebung *GTRNRW* erstellt, hier sollen die Schüler nun die Achsen selbst so skalieren, dass eine bestimmte Funktion dargestellt wird (Klinger, 2017). Es wird also von ihnen verlangt, dass sie die Achsen selbstständig unterschiedlich skalieren (die x-Achse jeweils „halb so groß“, wie die y-Achse), was noch einmal eine andere Herausforderung darstellt. In der vorhergegangenen Studie von Klinger wurde festgestellt, dass viele Schüler mit diesem Item große Probleme hatten, was unter anderem als Motivation dafür fungierte, dieses Verständnis im Kontext der hier durchgeführten Untersuchung noch einmal näher zu betrachten (Klinger & Thurm, 2016). Auch hier geht es um einen Darstellungswechsel von symbolisch zu graphisch und besonders die Kovariation liegt im Vordergrund, da durch Skalierung der

x-Achse und dem Zusammenhang zu den y-Werten optisch die Steigung beeinflusst werden kann. Hier kommt auch wieder die Kompetenz *Funktionen und Skalierungen nachvollziehen* zu tragen, allerdings ist auch ein besonderer Fokus auf die Kompetenz *Achsenskalierungen erstellen* gelegt.

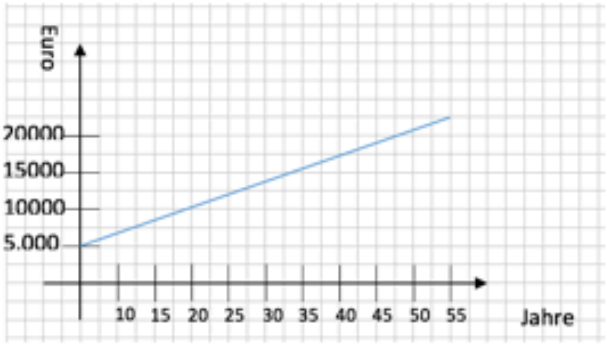
Aufgabe 6

Herr Müller hat Geld geerbt und ist nun auf der Suche nach einer geeigneten Anlagemöglichkeit, um möglichst schnell Gewinn zu machen. Er hat nun recherchiert und zwei Möglichkeiten gefunden, die für ihn in Frage kommen. Beide Anbieter zeigen ihm einen Graphen, der den Gewinnzuwachs über den Verlauf von mehreren Jahren darstellt.

Anbieter A:



Anbieter B:



Zu welchem Anbieter würdest du Herrn Müller raten? Begründe deine Entscheidung.

Abbildung 14 Aufgabe 6 des Vortests

In der letzten Aufgabe wird die Skalierung der Achsen noch unter Einbezug eines Kontextes betrachtet. Durch die Achsenskalierung entsteht hier der Eindruck, dass der eine Graph bei Anbieter B schneller wächst, der Kunde also mehr Gewinn macht. Richtig ist aber Anbieter A. Es wird vermutet, dass einige Schüler dies falsch interpretieren. Zum einen wird also wieder das Verständnis der Koordinatenachsen und deren Skalierung getestet, zum anderen ist hier ein Darstellungswechsel von verbal zu graphisch notwendig. Dies rückt dann - zusätzlich zum Kovariations- und Zuordnungsaspekt - auch die Grundvorstellung des Objektaspektes in den Vordergrund, da die gesamte Funktion

einen Überblick über den Gewinnzuwachs gibt und die Steigung daraufhin interpretiert werden muss. Die Kompetenz *Achsenskalierungen interpretieren* ist hier besonders relevant.

Mit diesem Vortest soll festgestellt werden, wo genau die Probleme der Schüler beim konzeptuellen Verständnis von Koordinatensystemen liegen, und welche Aspekte noch besonderen Förderbedarf haben.

Im weiteren Verlauf des Projektes wird nun eine Lernumgebung erstellt, die darauf abzielt, die Kompetenzen zu fördern, die in dem vorangegangenen Test überprüft und als problematisch herausgestellt wurden. Ein zusätzlicher Fokus wird hierbei dann auch auf der Einbindung des GTR liegen, da dieser zum einen erst die Beschäftigung mit solchen Phänomenen in den Unterrichtsalltag bringt und er zum anderen die Möglichkeit bietet variabel mit Dingen wie Skalierungen und Verschiebungen zu arbeiten und andere Erfahrungen zu machen als nur mit traditionellen Medien. Hierbei kommen dann zu den formulierten Kompetenzen noch weitere hinzu, die sich explizit auf die Integration des GTRs beziehen und dadurch nötig werden.

Zunächst sollen jedoch die Ergebnisse der Voruntersuchung dargestellt werden, um festzustellen, welche der vorangegangenen Kompetenzen die Schüler bereits besitzen, und wo noch Förderbedarf besteht.

5.2.2 Ergebnisse des Vortests

Die Durchführung des Vortests verlief problemlos. Alle anwesenden Schüler, der beiden Kurse, in denen die Erhebung stattfand, waren bereit an dem Test teilzunehmen und haben ihn bis zum Ende geschrieben. Der Test wurde bei 47 Schülern, die auf zwei Kurse verteilt waren durchgeführt und fand an einem Gymnasium in Dortmund in der Einführungsphase statt. Die Entscheidung für diese Altersgruppe ist dadurch begründet, dass hier davon ausgegangen werden konnte, dass die grundsätzlichen Kompetenzen in Bezug auf Funktionen in der Unterstufe erlernt worden sind.[5] Es wurde sich so erhofft, dass nicht grundlegende Verständnisprobleme des Inhaltes oder der Darstellungen zu falschen Antworten führen. Außerdem ist ab dieser Jahrgangsstufe der GTR verpflichtend zu nutzen, was - wie oben schon erläutert - die betrachteten Probleme erst relevant werden lässt.

[5] Vgl. Kapitel 2.1.1

Zur Auswertung konnten alle 47 Tests herangezogen werden, das heißt keiner der Tests lieferte unverwertbare Ergebnisse. Im Folgenden wird nun eine Ergebnisübersicht vorgestellt, die die prozentual richtig und falsch bearbeiteten Aufgaben darstellt.
Im Anschluss daran werden die einzelnen Aufgaben noch einmal qualitativ ausgewertet, Besonderheiten und Auffälligkeiten besprochen, sowie das Vorhanden- oder Nichtvorhandensein der Kompetenzen analysiert. Abschließend werden die Konsequenzen für die Lernumgebung diskutiert.

5.2.3 Quantitative Ergebnisse

Aufgabe	richtig	**%**	falsch	**%**	Nicht bearbeitet
1a	44	93,61	3	6,38	
1b	38	80,85	9	19,15	
1c	1	2,13	46	97,87	
2	28	59,57	15	31,91	4
3a	24	51,06	21	44,68	2
3b	25	53,91	20	42,55	2
4	19	40,42	25	53,19	3
5	24	51,06	15	31,91	8
6	41	87,23	5	10,64	1

Tabelle 5 Ergebnisübersicht des Vortests

Wie in Aufgabe 1 zu erwarten, erkannten die meisten Schüler das Koordinatensystem, welches sie aus ihrem Alltag gewohnt sind, als richtig. Auch das Koordinatensystem mit verschieden skalierten Achsen erkannten noch 80 % als richtig an. Große Probleme scheinen dann aufzutreten, wenn der Koordinatenursprung ein anderer ist, dies erkannten nur 2 Prozent als richtig an.
Die zweite Aufgabe verbindet erstmals einen Graphen mit dem anders skalierten Koordinatensystem, hier sind es bereits etwa 30 % der Schüler, die diese Aufgabe falsch bearbeiteten. Außerdem wurde hier zum ersten Mal eine Aufgabe von einem kleinen Teil der Schüler nicht bearbeitet
Bei Aufgabe 3 a und b haben jeweils zum ersten Mal - ausgenommen Aufgabe 1 c - mehr als 40 % der Schüler eine falsche Antwort gegeben. Hier ging es darum, die Achsen mit einem quadratischen Graphen in Verbindung zu bringen.
Aufgabe 4 bezieht sich nun auf den veränderten Koordinatenursprung, mit dem die Schüler bereits in Aufgabe 1 Probleme hatten. Hier sind es mehr als die Hälfte, die bei dieser Aufgabe Schwierigkeiten hatten und sie falsch beantworteten.

Auch bei Aufgabe 5 sind es knapp 32 %, die eine falsche Antwort gaben. Außerdem ist dies die Aufgabe, die die meisten Schüler nicht bearbeitet haben, auch dies kann auf ein mangelndes Verständnis der Aufgabe hindeuten. Diese Ergebnisse ähneln außerdem den Ergebnissen der Studie von Klinger, hier haben etwa die Hälfte der Schüler die Aufgabe falsch gelöst (Klinger, 2017).
Bei der letzten Aufgabe hatten die Schüler offenbar wieder weniger Probleme: Nur 10,64 % der Schüler haben diese falsch bearbeitet und nur einer hat diese nicht bearbeitet.

5.2.4 Deutung der quantitativen Ergebnisse

Es soll nun zunächst auf die Aufgaben und Ergebnisse eingegangen werden, die das grundsätzliche Problem der ungleichen Skalierung von x und y-Achse behandeln.
Als Erstes ist zu erkennen, dass die Schüler Probleme mit ungleich skalierten Koordinatenachsen hatten, dies ist noch nicht sehr dramatisch, wenn noch kein Graph involviert ist, wie in Aufgabe 1 zu sehen ist. Wenn dann ein linearer Graph in einem ungleich skalierten KS interpretiert werden soll, hatten schon mehr Schüler Probleme mit dem Lösen der Aufgabe. Zudem kann die Tatsache, dass hier einige Schüler gar keine Bearbeitung vornahmen, ein Indiz dafür sein, dass hier Verständnisprobleme vorhanden sind. Diese Problematik wird offenbar noch verstärkt, wenn es um eine quadratische Funktion, wie in Aufgabe 3, geht. Offenbar haben die Schüler größere Probleme mit den Achsenskalierungen, wenn sie gleichzeitig die Auswirkungen auf einen Graphen sehen. Dies kann dadurch begründet sein, dass der Zuordnungs- und Kovariationsaspekt hier natürlich eine offensichtlichere Rolle spielen und diese bei den Schülern nicht ausreichend verankert sind. Außerdem mussten sie hier einen aktiven Darstellungswechsel vollziehen, der vielleicht auch Grund für die Probleme sein kann. Wie man an Aufgabe 3 sieht, macht kaum einen Unterschied, ob der Graph nun tatsächlich der richtige ist oder nicht, was auch für eine grundsätzliche Überforderung mit der Skalierung spricht. Welche Strategien Schüler verwendet haben und wie sie versucht haben, damit umzugehen, wird in der qualitativen Inhaltsanalyse genauer beschrieben. Betrachtet man die Ergebnisse aus Aufgabe 5, so ist hier ebenfalls zu sehen, dass die Schüler Probleme mit der Skalierung hatten. Viele von ihnen waren nicht in der Lage, die Achsen selbstständig ungleich zu skalieren. Zudem haben relativ Viele die Aufgabe gar nicht bearbeitet, was ebenfalls dafürsprechen könnte, dass diese Schüler hier Probleme hatten.

Entgegen der Erwartungen sind in Aufgabe 5 nicht so viele Falschbearbeitungen aufgetreten, obwohl auch hier eine verschiedene Achsenskalierung verwendet wurden und sogar zusätzlich noch eine Interpretation im Sachzusammenhang notwendig war, also ein Darstellungswechsel von verbal zu graphisch nachzuvollziehen war. Die Vermutung ist hier, dass die Schüler solche Aufgaben und damit auch mit ihnen verbundene Lösungsstrategien, wie das Prüfen von einzelnen Punkten, aus dem Unterrichtsalltag gewohnt sind. Auch diese Vermutung wird in der qualitativen Analyse noch einmal näher betrachtet.

Ein weiterer Schwerpunkt des Testes, und auch des durchgeführten Projekts selbst, war der veränderte Koordinatenursprung. Dieser wurde in den Aufgaben 1 und 4 getestet.

In Aufgabe 1 hielten nur etwa 2 % der Schüler das Koordinatensystem mit dem veränderten Ursprung für richtig; dies zeigt, dass sie eine solche Form vermutlich nicht aus ihrem Alltag kennen und daher folgern, dass dies falsch ist. In diesem Fall sind sie wenig offen gegenüber der Veränderung und hinterfragen nicht, ob dies auch so richtig sein kann. Auch bei Aufgabe 4 sieht man, dass viele Schüler Probleme mit der veränderten Skalierung hatten. Sie ließen sich von den beiden Vorschlägen beeinflussen und hielten dann oft die Variante von Fritz für richtig.

5.2.5 Qualitative Inhaltsanalyse und Darstellung ausgewählter Schülerlösungen

Im Folgenden wird nun im Detail darauf eingegangen, wie die Schüler in den einzelnen Aufgaben ihre Lösungen begründet haben. Es werden außerdem konkrete Schülerbeispiele vorgestellt, die besonders erwähnenswert sind oder für eine bestimmte Strategie als beispielhaft angesehen werden.

Es wird herausgestellt, was ihre genauen Strategien, Probleme und Fehlvorstellungen sind. So soll ein besseres Bild davon entstehen, wo genau der Förderbedarf besteht und welche Kompetenzen bei den Schülern konkret gefördert werden müssen. Daraus folgen dann die Konsequenzen und der Förderbedarf für die eigentliche Lernumgebung.

Eine allgemeine Auffälligkeit, die sich über die gesamten Aufgaben hinweg zeigte, war das Fehlen angemessener Fachbegriffe. Beispielsweise verwendeten Schüler oft umständliche Beschreibungen wie „Aufbau der Zahlen“, „langgezogen“ und „der Maßstab ist ein anderer“, wenn sie die unterschiedliche Skalierung in Aufgabe 1, 2 und 3 beschreiben wollten (OA12; NN08; AB03). Auch bei Aufgaben, die den Ursprung

thematisieren, finden sich Formulierungen wie „der Graph liegt falsch“, die auf ein Fehlen von Fachbegriffen hindeuten (IN09). Dies ist ein Hinweis darauf, dass Schüler mit solchen Variationen nicht vertraut sind, im Unterrichtsalltag sind solche Fachbegriffe nicht notwendig. So wird die fehlende Auseinandersetzung mit dieser Thematik deutlich und verweist auf mangelndes Wissen der Schüler.

5.2.5.1 Aufgabe 1

Wenn Schüler das zweite Koordinatensystem als falsch klassifizierten, taten sie dies oft aus der Überzeugung heraus, dass man sowohl bei der x-, als auch bei der y-Achse gleiche Einteilungen wählen müsse. Vier der Schüler klassifizierten das KS als richtig und sind zusätzlich in der Lage, eine Aussage über die Veränderung der Ergebnisse zu bringen. Schüler AI09 behauptet zum Beispiel, „2 ist nicht falsch, würde aber die Ergebnisse komisch aussehen lassen“. Nur ein einziger Schüler (NL05) sagt „2 ist geeignet, um extreme Werte/Verläufe graphisch sinnvoll darzustellen.“ Hier war das einzige Mal die Fähigkeit zum Darstellungswechsel bereits in Aufgabe 1 sichtbar. Beim dritten Koordinatensystem behaupteten 38 der Schüler, dass der Schnittpunkt der Achsen der Nullpunkt sein müsse, da sonst das Koordinatensystem falsch sei. Ein weiteres häufiges Argument für die Falschheit der Koordinatensysteme ist die Tatsache, dass durch das Verschieben des Nullpunktes die negativen Zahlen nicht links und unten sind. Dies ist in 9 der Antworten zu finden. Auch das ist ein oft angebrachtes Argument der Schüler um das KS als falsch zu klassifizieren. Beispielsweise schrieb ÄL07 in diesem Zusammenhang: „das Minus ist auch falsch, weil es in der falschen Richtung angebracht wurde“.

Ein einziger Schüler (XR05) war in der Lage, eine Verbindung zu Aufgabe 3 herzustellen und diesen Zusammenhang zu erkennen. Die folgende exemplarische Lösung der Aufgabe von Schüler ÄL07 ist ein gutes Beispiel für Standardantworten der Schüler:

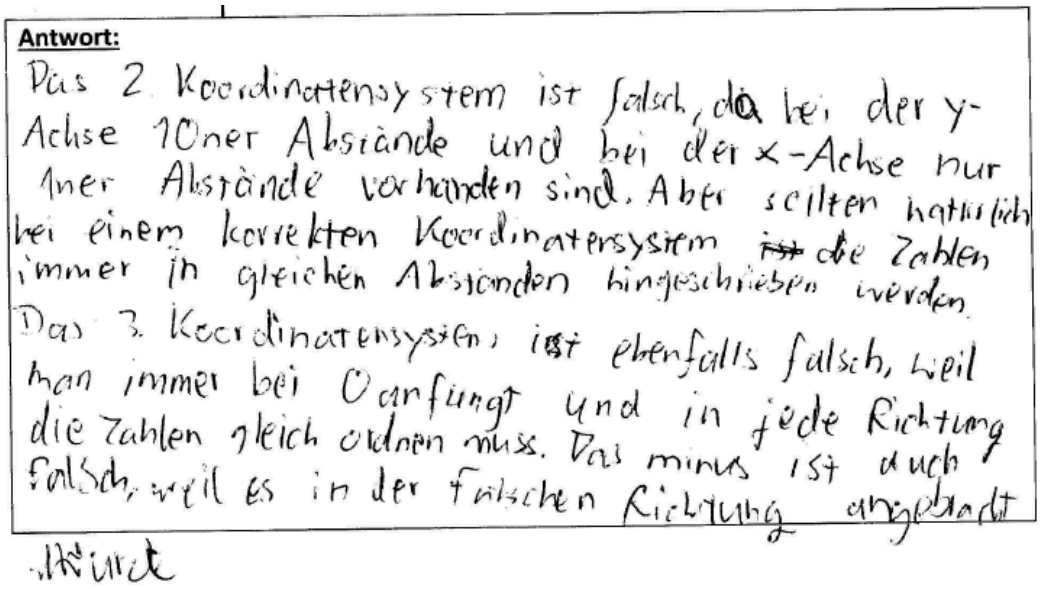

Antwort:
Das 2. Koordinatensystem ist falsch, da bei der y-Achse 10er Abstände und bei der x-Achse nur 1er Abstände vorhanden sind. Aber selten hat man bei einem korrekten Koordinatensystem ~~ist~~ die Zahlen immer in gleichen Abständen hingeschrieben werden.
Das 3. Koordinatensystem ist ebenfalls falsch, weil man immer bei 0 anfängt und in jede Richtung die Zahlen gleich ordnen muss. Das minus ist auch falsch, weil es in der falschen Richtung angebracht wurde.

Abbildung 15 Antwortbeispiel Aufgabe 1 Schüler ÄL07

Der Schüler hielt die unterschiedlichen Skalierungen für falsch und ist der Meinung, dass nur gleiche Abstände vorhanden sein dürfen. Auch den veränderten Koordinatenursprung hält er für falsch, und er versteht zudem nicht, warum die negativen Zahlen an anderen Stellen sind.

5.2.5.2 Aufgabe 2

Bei Aufgabe 2 ist vor allem auffällig, dass sich die Schüler offenbar auf das Standardkoordinatensystem verlassen haben und häufig gar nicht beachteten, wie die Achsen skaliert sind. Daher haben 15 hier eine falsche Lösung. Auffällig ist außerdem, dass Schüler, die Aufgabe 5 nicht konnten auch diese falsch bearbeitet haben. Das Problem der Achsenskalierung und dem linearen Graph besteht also in beiden Richtungen.

Zudem sind noch weitere Fehlvorstellungen auffällig, die nicht direkt etwas mit der Skalierung zu tun haben. 7 Schüler schrieben, dass f(x)=x keine Steigung habe oder dass der Graph in Abb. 2 keine konstante Steigung habe. Dies sind Fehler, die aufgrund eines mangelnden Verständnisses von Funktionen im Allgemeinen zustande kommen. Neun Mal argumentierten die Schüler so, dass das Koordinatensystem falsch ist und deshalb der abgebildete Graph falsch sei. Dies zeigt wieder, dass die Schüler zu solchen Darstellungsformen noch gar kein Konzept aufgebaut haben.

Die Begründung von Schüler UN11 zeigt zudem noch einmal sehr deutlich, dass zum Teil auch das grundlegende Verständnis von linearen Funktionen unzureichend ist:

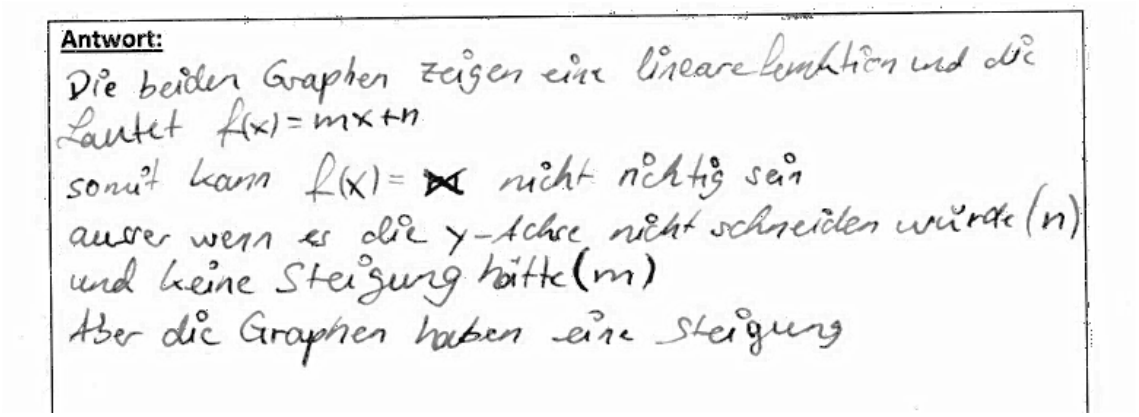
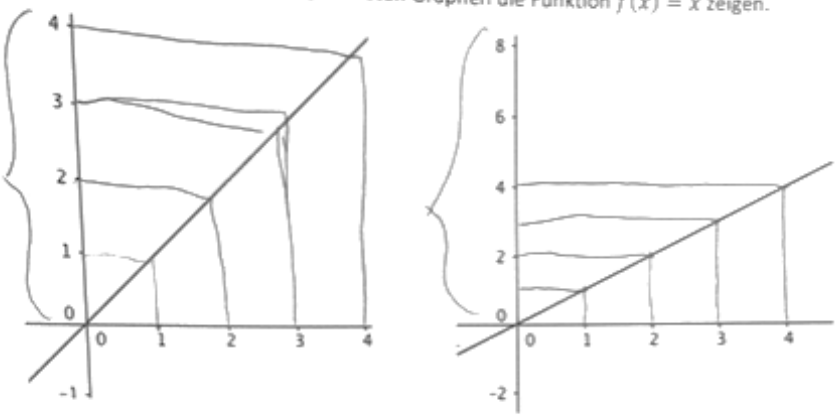

Antwort:
Die beiden Graphen zeigen eine lineare Funktion und die
Lautet f(x) = mx+n
somit kann f(x) = ~~x~~ nicht richtig sein
ausser wenn es die y-Achse nicht schneiden würde (n)
und keine Steigung hätte (m)
Aber die Graphen haben eine Steigung

Abbildung 16 Antwortbeispiel Aufgabe 2 Schüler UN11

Dieser Schüler interpretiert die Bedeutungen der Parameter m und n falsch und kommt so zu einer Begründung, die nicht stimmt und zudem ihren direkten Zusammenhang zur Fragestellung verloren hat.

Teilweise, wie zum Beispiel Schüler OA12, wurde versucht mittels von Zeichnungen zu einem Ergebnis zu kommen, dies ist bei elf Schülern der Fall. Jedoch ist es nur bei dreien in einem ähnlichen Umfang geschehen, wie in Beispiel OA12:

Lisa behauptet, dass beide abgebildeten Graphen die Funktion $f(x) = x$ zeigen.



Was sagst du dazu? Begründe.

Antwort:

Sie hat Recht.
Die Koordinatensysteme unterscheiden sich von den „Achsen", bzw. die Anordnung der Zahlen am KS, und die Graphen sehen sich nicht gerade ähnlich, aber bei $f(x)=x$ gilt, wenn man einen punkt nach rechts geht, geht es einen Punkt nach oben, also wären die Punkte vom Graphen (0/0) (1/1) (2/2) (3/3) (4/4) etc. was bei beiden der Fall ist.

Abbildung 17 Antwortbeispiel Aufgabe 2 Schüler OA12

Um die Aufgabe zu lösen nutzten diejenigen Schüler, die ein richtiges Ergebnis hatten, häufig die Strategie des Einsetzens verschiedener Punkte. Es kam jedoch fast nie vor, dass die Schüler dann auch erklärt haben, warum die beiden Graphen unterschiedlich aussahen, wie es bei Schüler AB10 der Fall war.

Antwort:

Lisa hat Recht, beide Graphen zeigen die Funktion $f(x)=x$, da beide die Steigung 1 haben. Bei dem rechten sieht der Graph nur anders aus, weil an y-Achse mit anderen Werten gearbeitet wurde, als bei dem linken Graphen.

Abbildung 18 Antwortbeispiel Aufgabe 2 Schüler AB10

5.2.5.3 Aufgabe 3

Das am häufigsten gebrachte Argument der Schüler, warum es sich bei 3a nicht um die Normalparabel handelt, war, dass sie „zu gestreckt“ sei (ALO4).

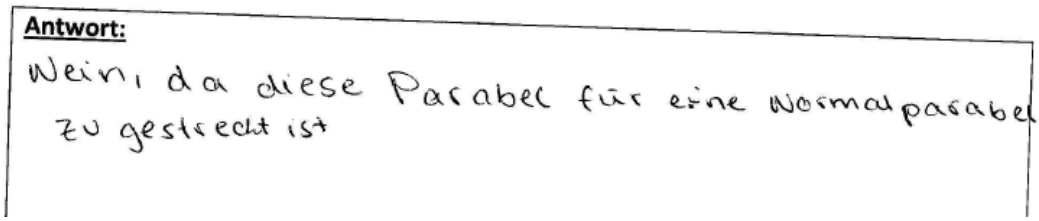


Abbildung 19 Antwortbeispiel Aufgabe 3a, Schüler AL04

Dies zeigt wieder, dass die Schüler bei ihren Überlegungen nicht auf die Achsenskalierung achteten und nur mit ihren gewohnten Techniken arbeiteten. Es wurde jedoch nie versucht, zu zeigen, dass die Parabel tatsächlich zu gestreckt ist. Auch hier traten ebenfalls andere Fehlkonzepte auf, wie zum Beispiel, dass die Normalparabel die Steigung 1 habe und ähnliches. Acht Schüler überprüften bei dieser Aufgabe einzelne Punkte.

In Aufgabenteil b war das am häufigsten verwendete Argument ebenfalls, dass der Graph zu gestaucht oder gestreckt sei (NU09). Teilweise wurde sogar angenommen, dass es sich um die Normalparabel handele (AS03). Es wurden erneut nicht die Achsen mit in die Überlegung einbezogen. Auch wurden diese Argumente nie anhand von Punkten oder anderweitig überprüft.

Es ist allerdings so, dass 19 Schüler Punkte aus dem Koordinatensystem in die Funktion einsetzten und so feststellten, dass es nicht passt. Bei Aufgabenteil a haben es auf diese Weise nur die Wenigsten versucht.

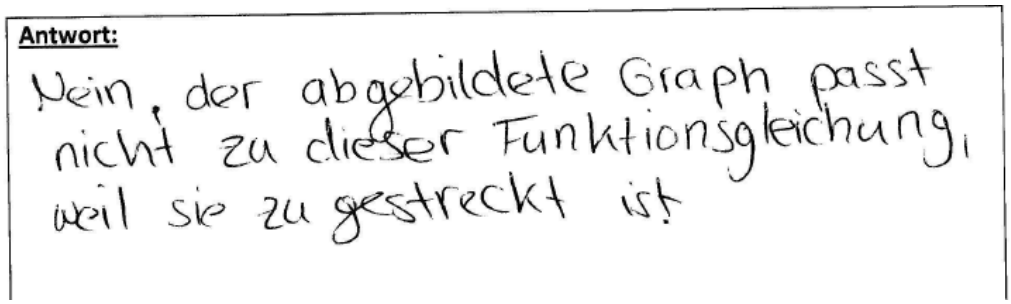


Abbildung 20 Antwortbeispiel Aufgabe 3b, Schüler NU09

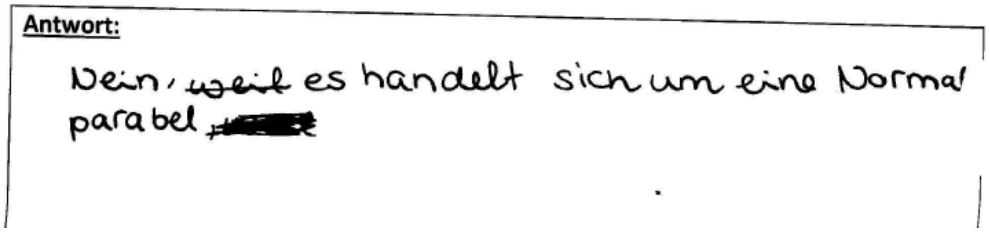


Abbildung 21 Antwortbeispiel Aufgabe 3b, Schüler AS03

Bei beiden Aufgabenteilen zeigt sich außerdem wieder, dass Schüler behaupteten, dass das Koordinatensystem falsch sei, und deshalb die Aufgabe im Ganzen. Es passt somit nicht in ihre Vorstellungen, dass Koordinatensysteme auch anders aussehen können.

5.2.5.4 Aufgabe 4

Aufgabe 4 zeigt eine Vielzahl verschiedener Fehlermuster. Auf einige soll hier exemplarisch eingegangen werden. Allerdings ist dies bereits ein Anzeichen dafür, dass hier besonders große Probleme aufgetreten sind.

Zunächst finden sich unter den Falschbearbeitungen Aussagen wie „weder Paul noch Fritz haben recht, da es sich nicht um ein rechtmäßiges Koordinatensystem handelt". Solche Behauptungen, wie diese von Schüler AI09, traten in den Begründungen häufig auf. Das zeigt, dass die Schüler sich nicht vorstellen konnten, dass ein solches Koordinatensystem überhaupt richtig sein kann.

Dies führt dazu, dass sie gar nicht erst versuchten Punkte zu überprüfen um herauszufinden, ob einer von beiden vielleicht doch Recht haben kann. Die Schüler behaupteten zudem, dass Fritz recht habe, weil sie das veränderte Koordinatensystem nicht beachten. Dies Entspricht auch den Vermutungen, die bereits bei der Erstellung des Tests aufgetreten sind. Die Antwort von Schüler AU01 lautet hier: „Fritz hat recht, da in Pauls Fall der Ansatz der Parabel drei Stellen über Null liegen müsste". Solche Schülerantworten zeigen, dass hier die in der Schule gelernten Argumente aufgeführt wurden, die Achsen aber wieder gar nicht in Betracht gezogen worden sind. Auch bei dieser Aufgabe sind wieder grundsätzliche Fehlkonzepte aufgetreten, wie beispielsweise die Antwort von Schüler AM03 zeigt.

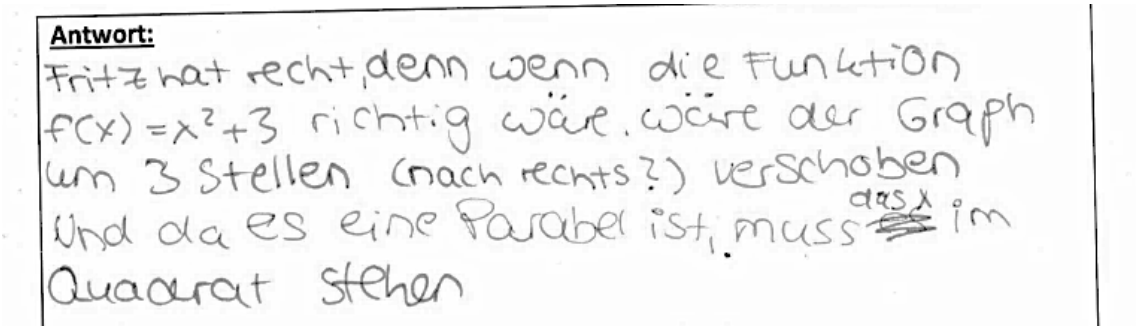


Abbildung 22 Antwortbeispiel Aufgabe, 4 Schüler AM03

In diesem Fall war dem Schüler nicht klar, was „+3" im Funktionsterm überhaupt bedeutet.

Ein Schüler hat die Funktionsterme richtig interpretiert und war auch in der Lage, dies in eine graphische Darstellungsform zu übertragen. Er beachtet zwar die Achsen, interpretiert ihre Bedeutung jedoch falsch beziehungsweise kann keinen Zusammenhang mit der Beschriftung und dem Graphen selbst herstellen (AD10).

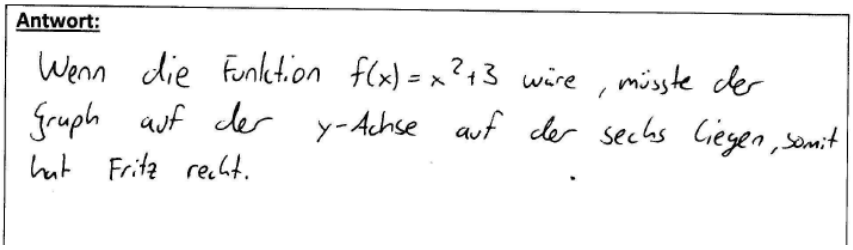


Abbildung 23 Antwortbeispiel Aufgabe 4, Schüler AD10

Auch hier sieht man das mangelnde Verständnis der Achsenskalierung sehr deutlich. Sechs Schüler behaupteten, dass die Achsen falsch seien, weil es keine Negativen Zahlen auf der y-Achse gäbe (ER06).

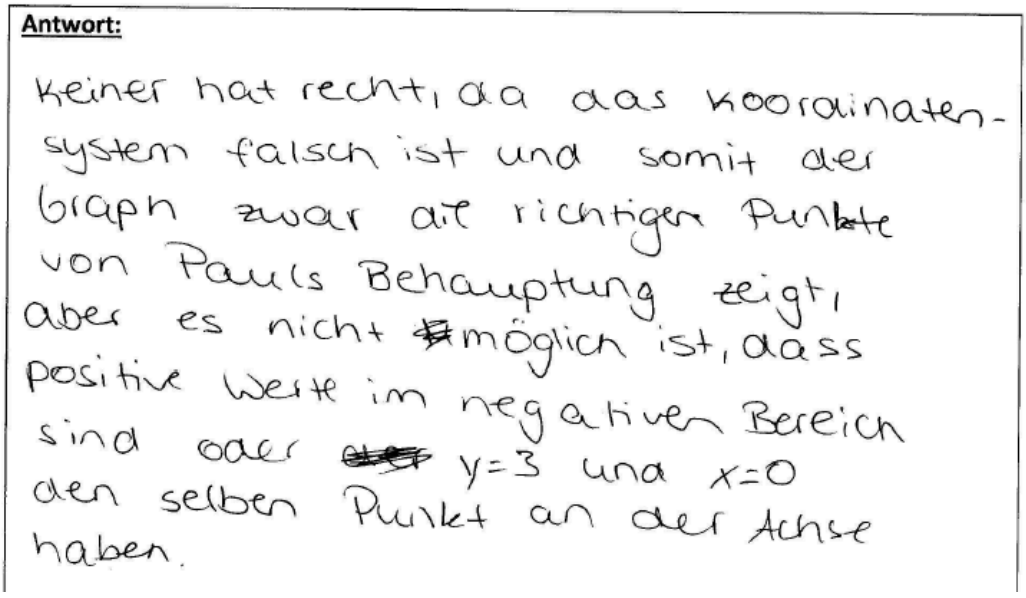


Abbildung 24 Antwortbeispiel Aufgabe 4, Schüler ER06

Dies ist so ähnlich schon in Aufgabe 1 zu sehen gewesen und zeigt, dass gar nicht verstanden wurde, was überhaupt an der Funktion verändert worden ist. Auffällig ist außerdem, dass lediglich vier Schüler versucht haben, bestimmte Punkte zu überprüfen und in den verschiedenen Darstellungsformen abzugleichen, obwohl diese Strategie in den Aufgaben davor durchaus verwendet wurde.

5.2.5.5 Aufgabe 5

Diese Aufgabe wurde, wie bereits erwähnt, von Klinger übernommen. In dieser Studie wurden drei grundsätzliche Fehlertypen herausgestellt, und zwar das Vertauschen der

Achsen, die Standardskalierung und das Zeichnen einer neuen Gerade. Die symmetrische Skalierung der Achsen und das Vertauschen sind auch in dieser Erhebung aufgetaucht, eine neue Gerade hat niemand eingezeichnet. Zehn Schüler scheinen den Graphen zu sehen und beschrifteten die Achsen automatisch symmetrisch - für sie scheinen die Achsen unflexibel zu sein.

Bei den Begründungen waren viele Schüler zwar in der Lage, zu erkennen, dass die Steigung der Gerade 2 sein muss, konnten dies aber nicht so übertragen, dass sie die Achsen beschriften können.

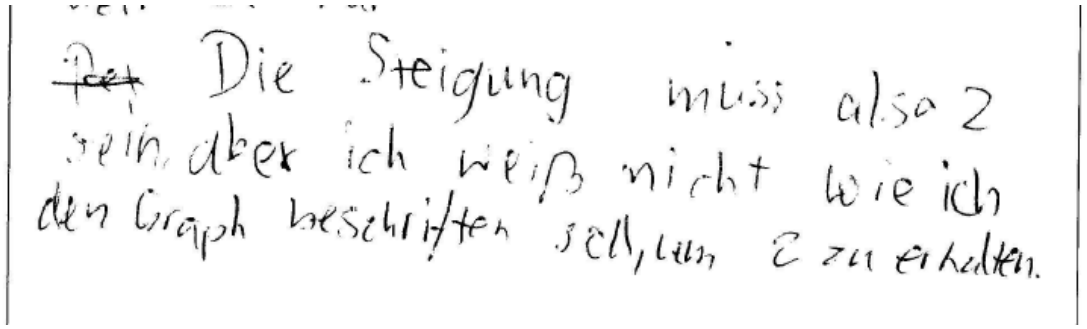


Abbildung 25 Antwortbeispiel Aufgabe 5, Schüler ÄL07

Wenn die Schüler die Beschriftung richtig durchgeführt haben, waren sie zumindest in 30 % der Fälle auch in der Lage, den Vorgang entsprechend zu erklären und nachzuvollziehen. Bei diesen Schülern sah man gut, dass sie das Konzept verstanden haben und den Darstellungswechsel vollziehen konnten (ER06).

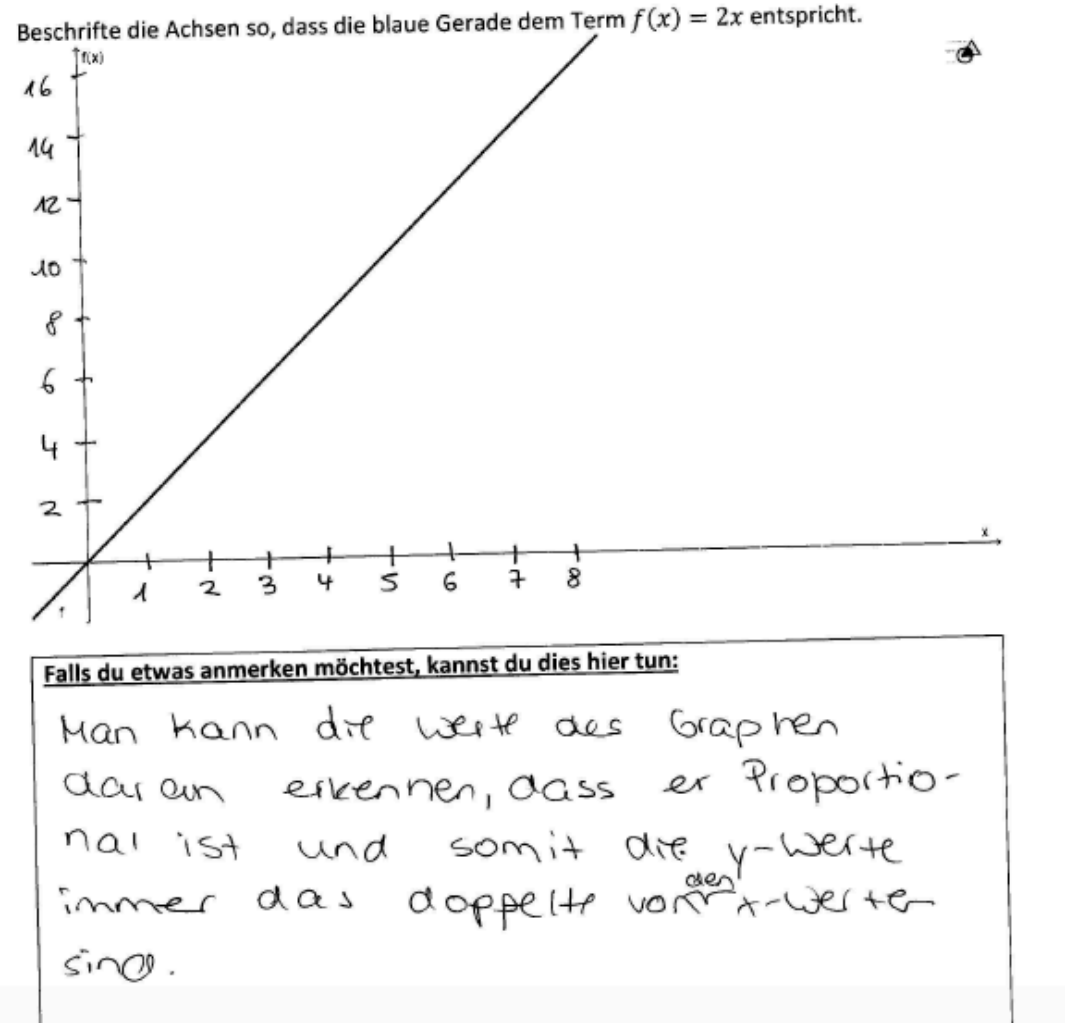


Abbildung 26 Antwortbeispiel Aufgabe 5, Schüler ER06

5.2.5.6 Aufgabe 6

Signifikant ist, dass bei dieser Aufgabe etwa 87 % der Schüler die richtige Antwort gaben. Dies kann daran liegen, dass Schüler solche ähnlichen Aufgaben aus ihrem Unterrichtsalltag bereits kennen und Strategien und Standardverfahren beherrschen. Viele verglichen hier wieder Punkte. Dennoch lassen sich bei einigen Schülerantworten wieder Fehlkonzepte ausmachen. Zum Teil gaben sie zwar die richtige Antwort, begründen dies aber falsch, wie zum Beispiel bei UN11 zu sehen ist.

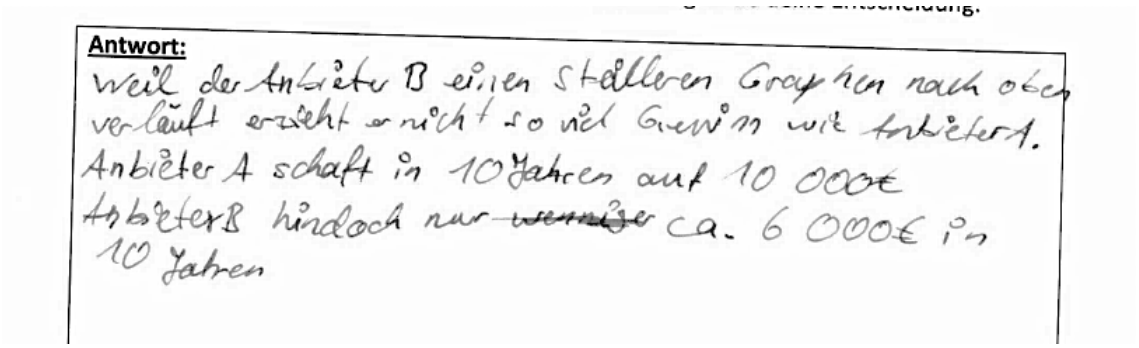


Abbildung 27 Antwortbeispiel Aufgabe 6, Schüler UN11

Hier wurden im zweiten Teil der Antwort zwar Punkte verglichen, im ersten Teil wird aber klar, dass der Schüler nicht verstanden hat, warum die Steigung eigentlich anders ist.

Betrachtet man die Antwort von Schüler AB10, so sieht man, dass dieser in den Graphen hineininterpretiert hat, dass das Angebot so lange läuft, wie die Achsen es anzeigen. Dies ist nicht Teil der Aufgabenstellung. Der Schüler sieht die Graphen als endlich an und hat nicht bedacht, dass auch der Graph von Anbieter A eigentlich noch weitergeht. Eine weitere Möglichkeit, diese Fehlinterpretation zu begründen, ist die Tatsache, dass die Aufgaben im Schulalltag häufig solche Begründungen fordern.

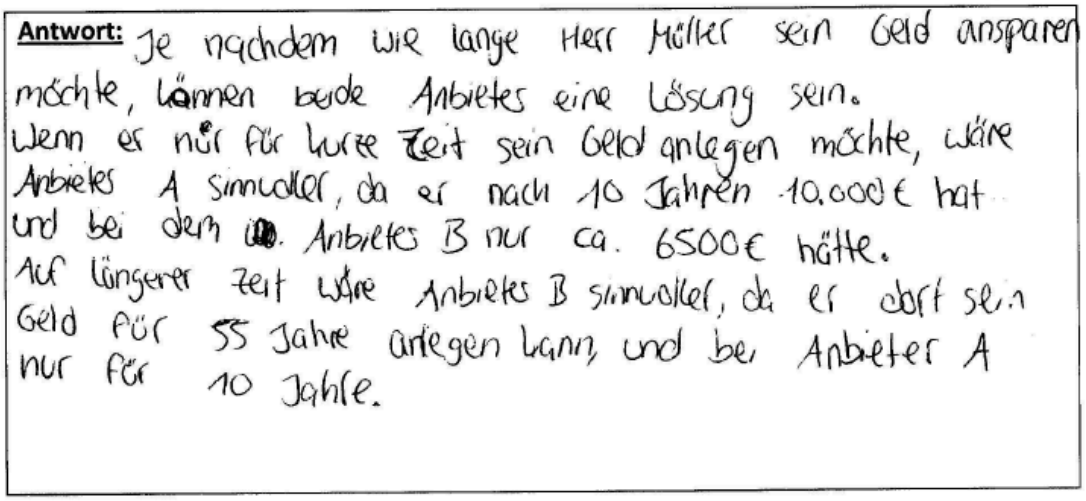


Abbildung 28 Antwortbeispiel Aufgabe 6, Schüler AB10

Vier der fünf Schüler, die eine falsche Antwort gaben, machten den Fehler, der bei der Testkonzeption erwartet wurde: AB09 behauptet zum Beispiel „Anbieter B, da der Gewinnzuwachs größer ist und der Graph steiler nach oben geht“. Hier wurde den Achsen keine Beachtung geschenkt.

5.2.6 Kompetenzen und Konsequenzen für die Lernumgebung

Aufgabe 1 zeigt - betrachtet man die qualitativen und quantitativen Ergebnisse - dass viele der Schüler Schwierigkeiten mit der Kompetenz *veränderte Koordinatenursprünge erkennen* haben. Die Kompetenz *Skalierungen erkennen* ist noch bei verhältnismäßig vielen Schülern vorhanden. Wie sich in den weiteren Aufgaben zeigt, ist dies jedoch zunehmend schwieriger, wenn Graphen ins Spiel kommen. Außerdem zeigt sich bereits hier ein Problem mit Darstellungswechseln und Grundvorstellungen.

Funktionen und Skalierungen nachvollziehen fällt den Schülern offenbar weit schwerer, als diese nur zu erkennen; Aufgabe 2 und 3 geben da entsprechende Hinweise. Auch haben viele Schüler grundsätzlich Schwächen beim Interpretieren der Funktion und bei deren Bezug auf einen entsprechenden Graphen. Beides wird noch deutlicher, wenn es sich um eine quadratische Funktion handelt. Vermutlich sind die grundsätzlichen Probleme der Schüler hier größer und sie lassen sich leicht verunsichern.

Offensichtlich haben viele Schüler noch Probleme mit der Kompetenz *veränderte Koordinatenursprünge erkennen*, was an den vielseitigen Fehlvorstellungen in Aufgabe 4 erkennbar ist. Außerdem ist in dieser Beziehung besonders deutlich geworden, wie schwer es einigen Schülern fällt, den Darstellungswechsel zwischen symbolisch und graphisch nachzuvollziehen. Weiterhin können viele Schüler keine Beziehung zwischen Achsen und Graph herstellen und sind nicht in der Lage Strategien anzuwenden, die sie bereits kennen. Auch fällt vielen Schülern das Erkennen von Achsenskalierungen schwer. Sie äußern oftmals, dass sie bei dieser Aufgabe keine Idee haben. Viele bearbeiteten die Aufgabe gar nicht oder sind lediglich in der Lage, die Achsen nach bekannten Mustern zu beschriften.

Die Kompetenz *Achsenskalierungen interpretieren* ist bei den Schülern entsprechend der Testergebnisse offenbar besser ausgebildet.

Allgemein ist an allen Aufgaben zudem zu erkennen, dass der Wechsel zwischen symbolischer und graphischer Darstellungsform schwerfällt. Selten können die Schüler einen Bezug herstellen, was natürlich durch die veränderten Graphen und Koordinatensysteme noch verstärkt wird. Besonders ein mangelndes Vorhandensein der Zuordnungs- und Kovariationsvorstellung kann festgestellt werden, da Schüler oft nicht den Zusammenhang der einzelnen Punkte erkennen. Sie können nur schwer nachvollziehen, wie die einzelnen Veränderungen voneinander abhängig sind. Außerdem scheint es bei den Grundkenntnissen im Bereich Funktionen zum Teil Mängel zu geben, da sich neben den erwarteten Fehlvorstellungen auch noch andere gezeigt haben, die vermutlich im Bereich der Grundkenntnisse zu verorten sind.

Im Großen und Ganzen lässt sich als Konsequenz für die Lernumgebung sagen, dass keine der zuvor erstellten Kompetenzen ausreichend bei den Schülern vorhanden ist. Zwar fällt es ihnen leichter, Achsenskalierungen zu erkennen und als richtig zu interpretieren, sobald jedoch eine lineare oder quadratische Funktion Teil der Aufgabe wird, stoßen viele Schüler an ihre Grenzen. Zudem ist es so, dass den Schülern das Konzept des veränderten Ursprungs fast gar nicht bekannt ist. Es ist wichtig, ihnen erstens

zu vermitteln, dass Koordinatensysteme variabler sind als sie es gewohnt sind. Zweitens müssen sie Strategien lernen, um innerhalb dieser veränderten Koordinatensysteme mit Funktionen und Graphen zu arbeiten und diese Zusammenhänge zu deuten. Da zum Teil auch grundsätzliche Mängel beim Verständnis von Funktionen zu erkennen sind, ist es je nach Lerngruppe notwendig, hier entsprechende Hilfestellungen zu geben, damit das eigentliche Thema überhaut bearbeitet werden kann und die Schüler überhaupt etwas erarbeiten können.

5.3 Die innerhalb des Projektes erstellte Lernumgebung

Im Folgenden wird die erstellte Lernumgebung vorgestellt. Die geschieht zunächst in der ursprünglich erstellten Form. Zu Beginn werden die erstellten Materialien und deren methodische Einbettung in das Unterrichtgeschehen dargelegt (vgl. Kapitel 5.3.1). Im Anschluss werden die Erfahrungen der Durchführung und die daraufhin gemachten Veränderungen vorgestellt. Außerdem wird darauf eingegangen, welche Maßnahmen ergriffen werden können, um die Lernumgebung an andere Schülergruppen anzupassen (vgl. Kapitel 5.3.2 & 5.3.3). Im Anhang befindet sich dann die daraus resultierende, finale Lernumgebung, beziehungsweise die Materialien, aus der sie besteht.

Abschließend soll noch angemerkt werden, dass die Lernumgebung unter Betrachtung der zuvor konzipierten Kompetenzen erstellt wurde und darauf abzielt, diese zu fördern. Mit der Nutzung des GTRs, die im Vortest noch bewusst ausgelassen wurde, kommen natürlich noch weitere Kompetenzen hinzu, die in folgender Tabelle dargestellt werden:

Name	Die Schülerinnen und Schüler sind in der Lage, ...
Skalierungen ändern	...die Einstellungen des GTR so zu verändern, dass sie die Skalierungen der Achsen und damit das Aussehen verschiedener Funktionen ändert
Auswirkungen nachvollziehen	...Auswirkungen von veränderten Skalierungen entsprechend zu erkennen nachzuvollziehen

Tabelle 6 ergänzende Kompetenzen in Bezug auf den GTR

5.3.1 Beschreibung der Lernumgebung in erster Form

Die Lernumgebung wurde für einen Zeitraum von 90 Minuten geplant. Zum Teil war für die grundlegende Struktur des Ablaufes und einiger Aufgaben der Artikel von Klinger und Thurm ein ausschlaggebender Impuls (Klinger & Thurm, 2016). Die grundsätzlichen

Inhalte wurden aber selbstständig und aufgrund der Erfahrungen des Vortestes festgelegt. Dies führte dazu, dass die Aufgaben und Materialien individuell erstellt wurden.
Zunächst soll nun die folgende Tabelle einen groben Überblick über den Ablauf der Stunde und die Materialien geben. Danach wird auf die einzelnen Elemente und Methoden sowie die Inhalte und Funktionen genauer eingegangen.

Phase	Inhalt/Methode	Medien	Sozialform
Einstieg	Einstiegsfolie (Lisa-Aufgabe)	Beamer, Laptop	Plenum
Erarbeitung	Lerntheke 1. **Vom Wert zum Graphen** 2. **GTR Experimente** 3. **Funktionenmemory** 4. **Anbieter**	Laufzettel (Beamer, Laptop) AB (Station1) GTR, AB (Station 2) Memorykarten, GTR, AB (Station3) AB (Station 4), Koordinatensysteme	Gruppenarbeit
Schluss	Einstiegsfolie (Neubeurteilung)	Beamer, Laptop	Plenum

Tabelle 7 Grober Ablaufplan der Lernumgebung

5.3.1.1 Einstieg und Übergang zur Erarbeitungsphase

Für den Einstieg in die Stunde wurde eine ähnliche Aufgabe gewählt, wie sie bereits in Aufgabe 2 des Vortests gewählt worden war. Allerdings wurde direkt der Aspekt des veränderten Ursprungs integriert, damit die Schüler diesen Punkt mit einbeziehen können. In der Durchführung wurde dies den Schülern als PowerPoint-Folie gezeigt, da Zugang zu einem Beamer bestand und dadurch die Abbildungen gut sichtbar präsentiert werden konnten.

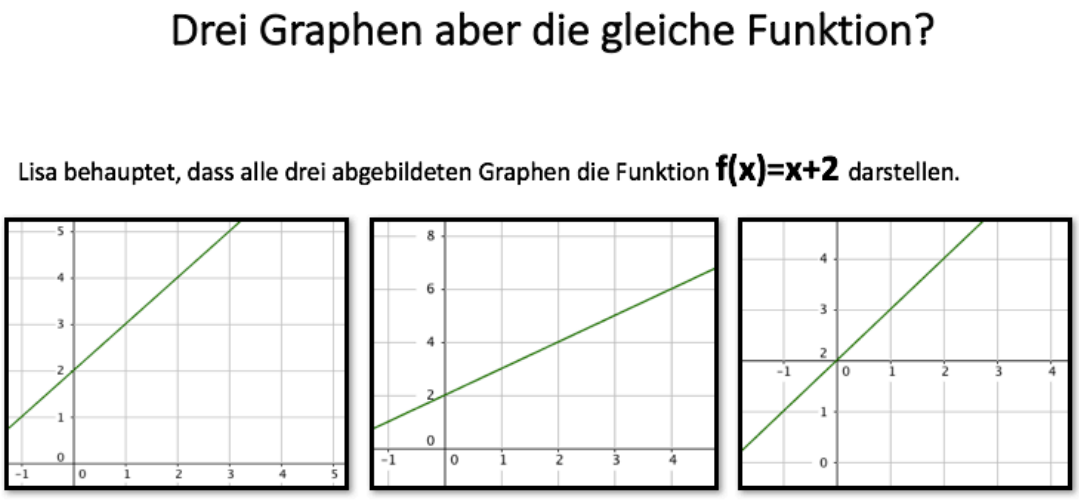


Abbildung 29 Einstiegsfolie der Lernumgebung

Ziel dieses Einstieges ist zunächst die Einführung in die Thematik an sich und das erzeugen eines kognitiven Konfliktes. Die Schüler sehen die Funktionen und haben einen Moment Zeit, sich in die Thematik einzufinden. Anschließend werden sie dazu angehalten, sich zu der Behauptung zu äußern. Dies führt zu dem kognitiven Konflikt und steigert das Interesse an der Thematik und den folgenden Aufgaben. Die verschiedenen Meinungen und aufkommenden Fragen der Schüler rechtfertigen außerdem die dann folgende, weitere Auseinandersetzung.

Für die Erarbeitungsphase wurde sich für die Methode der Lerntheke entschieden. Dies ist eine Form des Stationenlernens. Es wird so die Möglichkeit gegeben, in Gruppen verschiedene Materialien zu bearbeiten und sich so vielfältig mit verschiedenen Aspekten der Thematik auseinanderzusetzen sowie individuelle Zugänge zu finden (Barzel, Büchter, & Leuders, 2015). Dadurch, dass in einer Gruppe gearbeitet wird, besteht außerdem die Möglichkeit der Diskussion und gegenseitigen Hilfe. Dies ist wichtig, da der Bereich der Funktionen aus einem neuen und unbekannten Blickwinkel betrachtet wird. Außerdem haben sie die Möglichkeit, in individuellem Tempo zu arbeiten. Für besonders schnelle Schüler sind an den nötigen Stellen weitere Arbeitsaufträge vorhanden.

Während die Schüler die Stationen durchlaufen, füllen sie einen Laufzettel mit verschiedenen Fragen aus. Dieser soll ihnen zum einen helfen, dass Gelernte zu reflektieren und sich über Unklarheiten klar zu werden. Zum anderen wird dieser am Ende eingesammelt und bietet der Lehrkraft eine weitere Möglichkeit, den Lernerfolg zu beurteilen. Im Rahmen dieser Arbeit bringt er zudem weitere Informationen, um die Lernumgebung zu überarbeiten.

Laufzettel zur Lerntheke: Viele Graphen aber eine Funktion

Füllt bitte nach Bearbeitung jeder Station den Laufzettel aus.

Name der Station	War es leicht?		War die Aufgabe klar?		Hat es Spaß gemacht?		Hast du Neues gelernt?	
	Ja	Nein	Ja	Nein	Ja	Nein	Ja	Nein
Station 1: Vom Wert zum Graphen								
Station 2: GTR Experimente								
Station 3: Funktionenmemory								
Station 4: Anbieter								

Hast du sonst noch Anmerkungen:

Abbildung 30 Laufzettel (in Anlehnung an (Barzel, Büchter, & Leuders, 2015)

Bevor die Schüler mit der eigentlichen Arbeit starten, gibt es eine weitere Folie, die die allgemeinen Arbeitsaufträge und Abläufe darstellt. Diese bleibt die ganze Zeit für alle einsehbar, falls im Laufe der Bearbeitung Unklarheiten auftreten.

Arbeitsaufträge Lerntheke:

- Bildet Gruppen mit möglichst 5 (nicht mehr) Personen
- Setzt euch an Tischgruppen
- Bearbeitet die verschiedenen Stationen.
  - zuerst 1 und 2, die Reihenfolge ist egal
  - 3 und 4, wenn 1 und 2 bearbeitet sind, die Reihenfolge ist egal
- Zeit: Pro Station 15-20 Minuten
- Die Materialien befinden sich vorne, je einer aus der Gruppe kann sie nach beenden der vorherigen Station abholen

Abbildung 31 Folie der allgemeinen Arbeitsaufträge

Auf dieser Folie wird zudem erläutert, wie die Stationen zu bearbeiten sind. Für das Verständnis der Inhalte ist es wichtig, dass zunächst Station 1 und 2 bearbeitet werden und dann 3 und 4, wobei dort die Reihenfolge jeweils egal ist.

Station 1 erarbeitet die Inhalte zunächst ohne den GTR. Die dort gelernten Inhalte werden im Anschluss bei Station 2 auf den GTR übertragen. Nach Laakmann handelt es sich dann um das bereits im Theorieteil der Arbeit erwähnte *White-Box-Black-Box-Prinzip.* Starten die Schüler mit Station 2, so handelt es sich im das *Black-Box-White-Box-Prinzip*, bei dem die Erfahrungen zunächst am GTR gemacht werden, um anschließend die Phänomene dahinter zu untersuchen (Laakmann, 2013). Die dritte und vierte Station vertiefen die zuvor gelernten Inhalte noch einmal und verändern den Kontext. Nun soll noch einmal im Detail auf die einzelnen Stationen eingegangen werden. Es werden dafür exemplarisch Abbildungen der einzelnen Aufgaben gezeigt. Die Gesamtfassung ist in ihrer überarbeiteten Form im Anhang zu finden.

5.3.1.2 Station 1

Die Schüler erhalten in ihrer Gruppe je ein Deckblatt mit den Arbeitsanweisungen und entscheiden sich für einen der Schwierigkeitsgrade.

Station 1:
Vom Wert zum Graphen

Aufgaben:

1) **Einzelarbeit:** Sucht euch je eine der Wertetabellen aus und tragt die Werte in die verschiedenen Koordinatensysteme ein, um den entsprechenden Graphen zu zeichnen
   Entscheidet dabei selbstständig, wer sich welchen Schwierigkeitsgrad zutraut.

Hinweis: *Wenn ihr weniger als 5 Mitglieder seid, lasst ihr Schwierigkeitsgrad 1, 2... weg*

2) **Einzelarbeit:** Beantwortet in die folgenden Fragen:
   - Was ist das besondere an euren Koordinatensystemen?
   - Was verändert sich, was bleibt gleich?

Hinweis: *das erste Koordinatensystem ist jeweils das „Normale", also das, was du aus dem Unterricht gewohnt bist. Hier brauchst du die Fragen nicht beantworten.*

3) **Gruppenarbeit:** Stellt euch gegenseitig eure verschiedenen Graphen und deren Auffälligkeiten vor und korrigiert Fehler/beantwortet Fragen eurer Gruppenmitglieder.

Für Schnelle:

- Tragt die Funktionen in weitere, eigene Koordinatensysteme ein

Abbildung 32 Arbeitsaufträge Station 1

Schwierigkeitsgrad 2: $f(x) = 2x + 2$

x	0	1	2	3	4	5
f(x)	2	4				

***Hinweis**: Du darfst auch selbstständig weitere Werte berechnen, wenn dir dies das Zeichnen erleichtert.*
→ ergänze zunächst die fehlenden Werte

Abbildung 33 Auszug Materialien Station 1

Zusätzlich zu den Wertetabellen erhalten die Schüler außerdem die verschieden skalierten Koordinatensysteme, in die die Werte eingetragen werden sollen. Es ist hier sowohl die x- als auch die y-Achse anders skaliert und es gibt Koordinatensysteme, die verschiedene Ursprünge haben. Am Ende jedes Koordinatensystems sollen die Schüler außerdem reflektieren, was das Besondere an diesem ist, und was sich verändert und gleichbleibt. Dies hat den Zweck, die Schüler dazu anzuregen, die Veränderungen bewusst wahrzunehmen und zu reflektieren.
Sinn dieser Station ist es zunächst, den Schülern einen Einstieg in die Thematik zu bieten. Durch das Eintragen in das Standardkoordinatensystem wiederholen sie noch einmal diese Inhalte, bevor es um die veränderten Koordinatensysteme geht. Sie haben die Möglichkeit, die Veränderungen und Abweichungen vom Normalzustand aktiv zu erfahren. So verbessert sich außerdem die Fähigkeit zwischen verschiedenen Darstellungsformen zu wechseln. Zudem stellen sie erste Vermutungen über die Effekte der Veränderungen auf und können aufkommende Fragen und Fehler direkt klären. Durch die selbstständige Einteilung der Funktionen kommt es hier außerdem zu einer inneren Differenzierung wobei durch das gegenseitige Vorstellen trotzdem viele Beispiele in kurzer Zeit gesehen werden. Außerdem ist die Schülergruppe, in der die Lernumgebung getestet wird, der Autorin nur aus einer vorherigen Stunde bekannt, weshalb eine Selbsteinschätzung der Fähigkeiten für sinnvoller gehalten wird. Aus demselben Grund wurden nur lineare und quadratische Funktionen gewählt. Da der Leistungsstand und die Leistungsfähigkeit der Lerngruppe nur bedingt bekannt ist, wurden eher einfachere Beispiele genutzt, um Probleme auszuschließen, die andere Gründe haben. Aus diesem Grund wurde sich zudem bewusst dazu entschieden, nur die Skalierung der y-Achse zu ändern und den Ursprung nur in eine Richtung zu verschieben. Komplexere Veränderungen folgen im Rahmen von Station 3.

Dadurch, dass die Schüler sich die Ergebnisse ihrer Funktionen später gegenseitig präsentieren sollen, wird sichergestellt, dass sie Verantwortung für das eigene Lernen und das ihrer Mitschüler übernehmen und die Aufgaben ernst nehmen und tatsächlich bearbeiten.

5.3.1.3 Station 2

Station 2:
GTR Experimente

Aufgaben:

1) Einzelarbeit: Bearbeitet Material 1.
2) Besprecht in eurer Gruppe das zuvor gelernte Vorgehen und klärt Fragen. Macht erst mit Aufgabe 3 weiter, wenn Material 1 verstanden ist.
3) Durch Veränderung von Xmin/max und Ymin/max kann man das Aussehen des Graphen verändern, macht hierzu weitere Experimente und füllt die Tabelle aus

Hinweis: *Stellt das V-Window wieder auf „STANDRD" (vgl. Material 1) und löscht die vorherige Funktion, bevor ihr mit Aufgabe 4 beginnt*

4) Entscheidet euch je für eine der Funktionen, macht die Experimente und füllt die Tabelle aus. Stellt euch eure Ergebnisse gegenseitig vor und klärt Fragen. Zeigt auch die entsprechenden Graphen auf dem GTR.

Hinweis: *Wenn ihr weniger als 5 Mitglieder seid, lasst ihr Funktion 1, 2... weg*

Für Schnelle:

Denkt euch eigene Aufgaben mit neuen Funktionen aus

Abbildung 34 Arbeitsaufträge Station 2

Diese Station bezieht nun die Nutzung des GTR mit ein und ermöglicht Erfahrungen mit den veränderten Skalierungen zu machen. Außerdem wird zu Beginn geübt, wie man den Taschenrechner bedienen muss und welche Schritte zu den gewünschten Veränderungen führen.

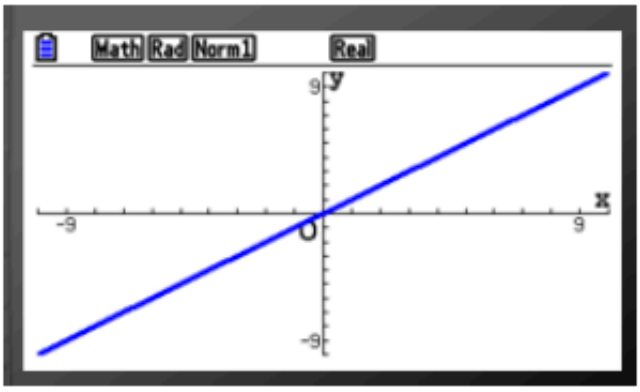
Material 1:

Anleitung zum Ändern der Skalierung der Koordinatenachsen:

Vorbereitung:

- Gehe im Menü des GTR auf „Graph“
- Lösche alle zuvor eingegebenen Funktionen (F2: „DELETE“)
- Gib ganz oben die Funktion **f(x)=x** ein und drücke „DRAW“
- Drücke „V-Window“ (F3)
- Drücke noch einmal F3 („STANDRD“) und EXE und dann wieder „DRAW“ (F6)

Dein Fenster müsste jetzt folgendermaßen aussehen:



Änderung der Skalierung

1) Drücke F3 („V-Window“) und ändere die folgenden Werte:

Xmin: -5

max: 5

Alle anderen Werte änderst du nicht.

Anschließend sollte dein Fenster so aussehen:

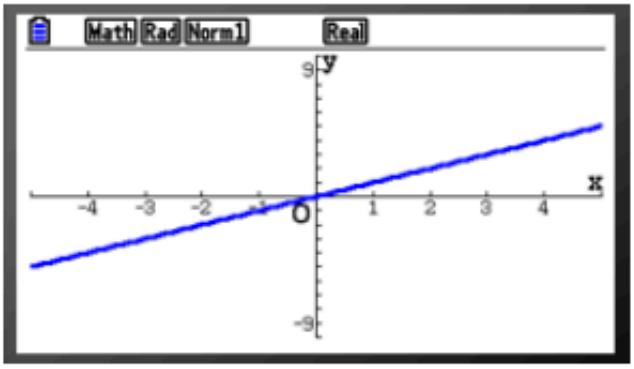


Abbildung 35 Material 1 Station 2

Bevor es darum geht, die Achsen selbständig zu verändern, wird erst einmal der grundsätzliche Umgang in kleinen Schritten geübt, um auszuschließen, dass bereits die Probleme entstehen.

Mit derselben Funktion, mit der vorher geübt wurde, werden im Anschluss weitere Experimente gemacht.

Zu Aufgabe 3:

Hinweis: *Skizziere die veränderten Graphen auf einem karierten Zettel!*

Xmin	max	Ymin	max	das hat sich verändert:

Was genau ist der Grund für das veränderte Aussehen der Graphen?

_____

_____

Abbildung 36 Material Station 2

Das kleinschrittige Vorgehen wurde gewählt, da Schüler erfahrungsgemäß viele Probleme haben, sobald der GTR zum Einsatz kommt. Um den Schülern noch einmal bewusst zu machen, dass es sich um verschiedene Darstellungen einer Funktion handelt und keine neuen Funktionen entstehen, sollen sie nach den Experimenten noch einmal begründen, wie es letztendlich zu den Veränderungen gekommen ist.

Anschließend wird wieder innerhalb der Gruppe differenziert. Jeder untersucht nun die Auswirkungen anhand anderer Funktionen. Auch hier werden die Ergebnisse am Ende verglichen, um verschiedene Beispiele und Auswirkungen von Veränderungen zu betrachten. Es ist erneut so, dass verschiedene Funktionen linearer und quadratischer Art zur Verfügung stehen und die Schüler selbstständig entscheiden können, wer welche Funktion bearbeitet.

Zu Aufgabe 4:

Funktion 1:

$$f(x) = 3x$$

Anweisung	Xmin	max	Ymin	max
f(x) soll viel flacher aussehen				
f(x) soll viel steiler aussehen				
f(x) soll ungefähr aussehen wie f(x)=x				

Abbildung 37 Auszug Materialien Station 2

Abschließend haben die Schüler bei dieser Station auch die Vorteile des GTR erfahren, beispielsweise der schnelle Wechsel der Darstellungen und die direkte Beobachtung von Veränderungen.

5.3.1.4 Station 3

Station 3:
Funktionenmemory

Aufgaben:

1) Memory: Legt die Karten verdeckt vor euch auf den Tisch und versucht, Paare zu finden. Jede Funktion hat genau einen Partner. Wenn ihr glaubt ein Paar gefunden zu haben überprüft dies ohne und mit GTR. Hilft der GTR euch hier überhaupt weiter?

Hinweis: *Wenn ihr glaubt fertig zu sein, könnt ihr euch die Lösung abholen und vergleichen*

Für schnelle:

Sucht euch eine der Funktionen aus, zeichnet sie in das „normale" Koordinatensystem und ein weiteres Verändertes.

Abbildung 38 Arbeitsaufträge Station 3

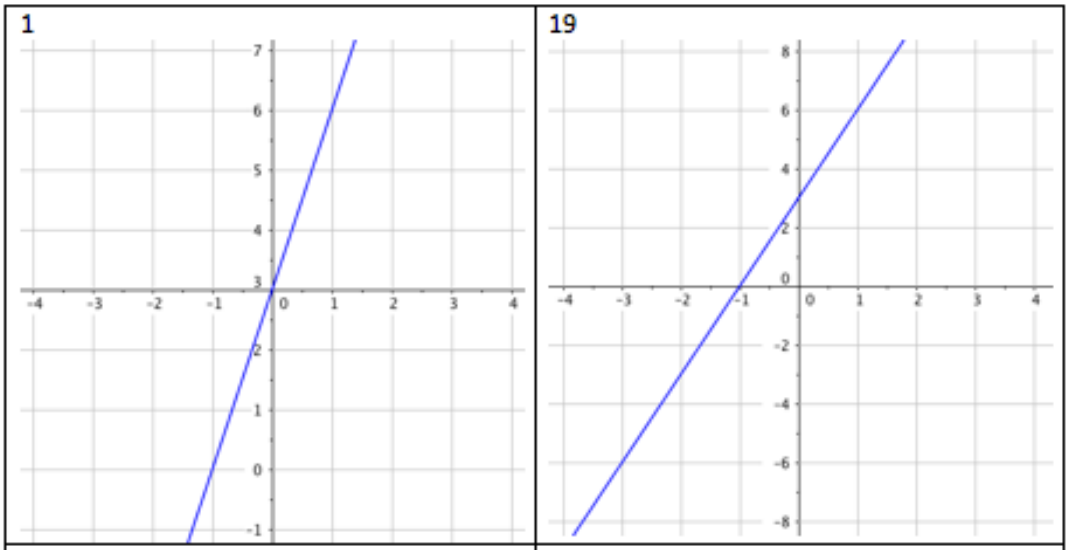


Abbildung 39 Auszug Memorykarten Station 3

Die dritte Station fasst wieder den Aspekt der veränderten Skalierung und den des veränderten Ursprungs auf. Dieses Mal ist es so, dass die Schüler durch eine spielerische

Auseinandersetzung mit der Thematik das in den beiden vorherigen Stationen Gelernte noch einmal wiederholen und sich mit weiteren Beispielen und Auswirkungen auseinandersetzen sollen. Dies geschieht in Form eines Memorys, bei dem die Schüler veränderte Darstellungen von Funktionsgraphen einander zuordnen sollen. Diese Station ist komplexer als die vorherigen, da nun nicht mehr mit der Originalfunktion verglichen werden kann, sondern beide Formen des Graphen verändert worden sind. Die Schüler müssen die zuvor erarbeiteten Strategien anwenden, um herauszufinden, welche Paare zusammengehören, da dies nicht auf den ersten Blick zu erkennen ist. Diese Station bietet zudem noch einmal die Möglichkeit, gemeinsam über Probleme zu diskutieren und Unsicherheiten mit den Gruppenpartnern zu klären.

5.3.1.5 Station 4

In der letzten Station geht es darum, das Gelernte auf einen Sachzusammenhang zu beziehen. Es wird hier noch einmal das Verständnis überprüft, da es in den Aufgaben keine direkte Aufforderung dazu gibt, die Achsen anders zu skalieren. Die Schüler müssen sich somit selbst überlegen, was sich für Möglichkeiten anbieten, das Angebot attraktiver zu gestalten.

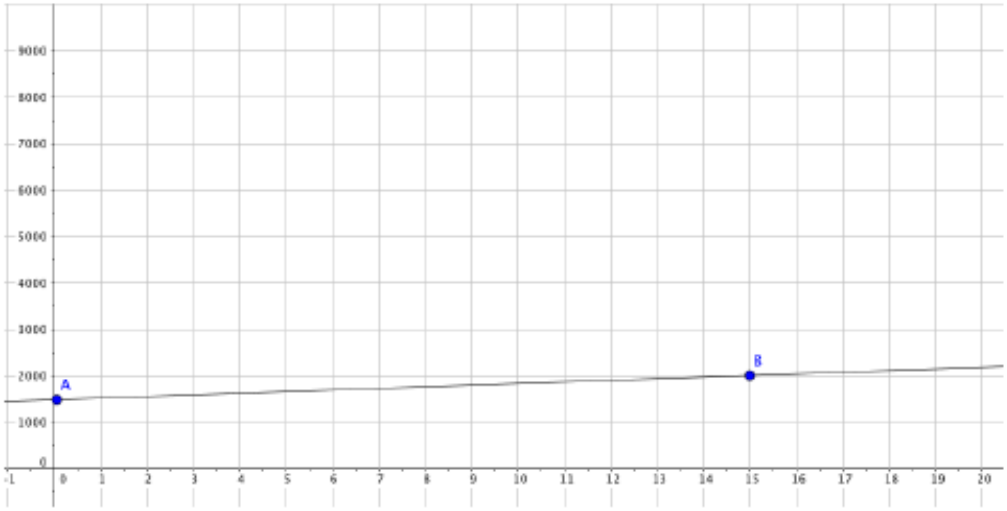
Die Schüler bekommen zum Bearbeiten der Aufgaben unbeschriftete Koordinatensysteme und überlegen und experimentieren gemeinsam. Die zweite Aufgabe bietet noch einmal andere Variationen und soll dazu anregen, weiter über die Konsequenzen der Veränderungen von Koordinatenachsen zu diskutieren und dies zu verinnerlichen.

Station 4:
Anbieter

Aufgaben:

1) Frau Urbanczyk hat Geld geerbt und will es nun möglichst gewinnbringend anlegen. Einer der Anbieter hat nun einen Termin mit ihr und möchte sein Angebot natürlich möglichst attraktiv und gewinnbringend aussehen lassen. Versetzt euch gemeinsam in die Lage des Anbieters und überlegt, wie ihr das Angebot für Frau Urbanczyk auf den ersten Blick attraktiver gestalten könntet.

Die untere Abbildung zeigt den Gewinnzuwachs im Laufe der Jahre



Hinweis: *Koordinatensysteme zum Ausprobieren findet ihr auf der nächsten Seite.*

2) Wie stellt man folgende Situationen am übersichtlichsten dar?
   -Wenig Gewinn und Anlage über einen langen Zeitraum
   -Viel Gewinn und kurze Anlagezeit
   -Was gibt es noch für Möglichkeiten?
   Zeichnet eigene Koordinatensysteme und stellt Kriterien für die Skalierung der Koordinatensysteme auf

Diskutiert in der Gruppe und zeichnet Beispiele!

Abbildung 40 Arbeitsaufträge Station 4

5.3.1.6 Sicherung

Am Ende der Stunde wird noch einmal die Einstiegsfolie gezeigt und gefragt, wie die Meinung der Schüler jetzt zu dem dargestellten Problem ist. So soll sichergestellt werden, dass die Schüler Sicher im Umgang mit den veränderten Koordinatensystemen sind und diese nicht mehr für falsch halten. Sie sollten nun außerdem in der Lage sein, durch Prüfen

von Punkten und Steigung zu beweisen, dass es sich um die gleiche Funktion handelt. Da während des Durchlaufens der Stationen keine gemeinsame Sicherung stattfand, um den Arbeitsfluss und die Eigenverantwortung für das Lernen nicht zu stören, kann hier noch einmal festgestellt werden, ob noch Probleme und offene Fragen bestehen. An dieser Stelle soll dann im Anschluss noch einmal genauer über die Strategien gesprochen werden, mit denen man prüft, ob es nun die gleiche Funktion ist (gemeinsame Punkte, Steigung prüfen).

5.3.2 Durchführung der Lernumgebung und Ergebnisse

Die Lernumgebung wurde an einem Gymnasium in Dortmund über einen Zeitraum von etwa 90 Minuten in einem Kurs der EF getestet. Die Testung der Lernumgebung fand auf zwei Tage verteilt statt, da die Unterrichtsstunden in 60 Minuten getaktet sind. Im Anschluss daran schrieben die Schüler einen etwa 30-minütigen Test, der identisch zum Vortest ist.

Grundsätzlich gab es keine großen Probleme bei der Durchführung. Die Schüler arbeiteten zum Großteil mit und hatten am Ende alle Ergebnisse zu liefern. Es war jedoch so, dass aus zeitlichen Gründen nicht alle mit Station 4 fertig wurden. Auf Verständnisprobleme, und solche, die die Lernumgebung beeinflussen, wird später noch eingegangen.

Abschließend sei noch anzumerken, dass die Lerngruppe den GTR-Modell *Casio fx-CG 20* nutzt und jeder der Schüler ein eigenes Exemplar besitzt. Die Aufgaben wurden entsprechend konzipiert, was besonders in Station 2 zu sehen ist.

5.3.2.1 Ergebnisse des Nachtests

Im Anschluss an die Durchführung schrieben die Schüler den Test, der bereits als Vortest in der anderen Lerngruppe durchgeführt wurde. Dies soll Ergebnisse darüber liefern, ob tatsächlich die herausgestellten Probleme gefördert wurden. Die Auswertung dieses Tests stellt den ersten Indikator für den Erfolg der Lernumgebung dar und soll Hinweise darauf geben, was noch verbessert werden kann. Der zweite Aspekt, der Hinweise zur Verbesserung geben soll, ist der Laufzettel der Schüler. Schließlich werden noch die persönlichen Eindrücke und Erfahrungen während der Durchführung reflektiert.

Aufgrund dieser Ergebnisse wird die Lernumgebung dann entsprechend verbessert. Außerdem wird noch darauf eingegangen, welche Optimierungen vorgenommen werden

können, um die Lernumgebung an eine persönliche Lerngruppe anzupassen, sollten weitere Lehrkräfte diese mit ihrem Kurs durchführen wollen.
Die Überarbeitung geschieht wieder in der Reihenfolge der einzelnen Unterrichtsetappen, also erst Einstieg, dann die einzelnen Stationen, wobei hier auch eine Reflektion der Methode stattfindet, dann die Sicherung.
Zunächst soll nun aber auf den geschriebenen Test und dessen Ergebnisse eingegangen werden.

Aufgabe	richtig	**%**	falsch	**%**	Nicht bearbeitet
1a	20	95,24	0	0	1
1b	20	95,24	0	0	1
1c	16	76,19	4	19,05	1
2	21	100	0	0	
3a	20	95,24	1	4,76	
3b	16	76,19	2	9,52	3
4	16	76,19	4	19,05	
5	15	71,43	3	14,28	2
6	19	90,48	2	9,52	

Tabelle 8 Ergebnisübersicht des Nachtests

Bei der Betrachtung der Ergebnisse muss berücksichtigt werden, dass es sich bei der nun getesteten Lerngruppe um eine andere handelt als die des Vortestes. Diese Entscheidung wurde bewusst getroffen, um während der Durchführung der Lernumgebung zu verhindern, dass durch den Vortest bereits Lernerfolge erzielt worden sind. Es hat aber für die Auswertung zur Folge, dass diese Schülergruppe natürlich andere Vorerfahrungen haben kann. Dadurch, dass es sich bei beiden um Kurse der Einführungsphase an Dortmunder Gymnasien handelt, wird aber davon ausgegangen, dass diese sich in Grenzen halten. Auch war die Schülergruppe, in der die Lernumgebung und der Nachtest durchgeführt wurde, kleiner. Letztendlich gaben 21 Schüler einen Nachtest ab.
Betrachtet man jedoch die enormen Unterschiede im Vergleich zum Vortest, kann dieses Ergebnis durchaus als aussagekräftig betrachtet werden. In jeder der Aufgaben ist die Quote der richtigen Antworten deutlich gestiegen und liegt immer über 70 %. Bei Aufgabe 2 ist zu bedenken, dass diese fast genauso im Einstieg und in der Sicherung betrachtet wurde, was die extrem hohe Quote richtiger Antworten erklärt. Besonders bei den Aufgaben 3 c und 4, bei denen es um den veränderten Koordinatenursprung ging und bei denen die Schüler des Vortestes die meisten Probleme hatten, sind Verbesserungen zu erkennen. Aber auch die Aufgaben, wo entweder unterschiedliche Skalierungen

erkannt oder selbst erstellt werden sollten, zeigen deutlich bessere Ergebnisse. Gerade die Tatsache, dass mehr Schüler Aufgabe 5 lösen konnten, zeigt den Lerneffekt besonders gut, da dies nicht direkt innerhalb der Lernumgebung geübt wurde. Das Verständnis für Achsen, deren Skalierungen und deren Auswirkungen auf das Aussehen des Graphen hat sich somit eindeutig verbessert.

Schaut man sich die einzelnen Begründungen der Schüler genauer an, ist vor allem auffällig, dass alle, die richtige Ergebnisse haben, auch eine angemessene Fachsprache verwendeten. Sie nutzen Formulierungen wie „Skalierung“, „Ursprung“ und „Steigung“. Sie wendeten außerdem alle geeignete Strategien an, um die Funktionen miteinander oder mit den anderen Darstellungsformen zu vergleichen. Alle Schüler suchten gemeinsame Punkte und verglichen die Steigung durch Berechnung oder Eintragung von Steigungsdreiecken oder Ähnlichem. Dies ist auch bei der letzten Aufgabe der Fall, was zeigt, dass die Schüler hier mit mehr Strategie arbeiteten als noch bei dem Vortest, wo einige dazu nicht in der Lage waren.

Betrachtet man diese Ergebnisse, so kann man die Lernumgebung durchaus als Erfolg bezeichnen. Es ist jedoch so, dass sowohl der Laufzettel der Schüler als auch die persönlichen Erfahrungen während der Durchführung einige Punkte mit Verbesserungsbedarf aufdecken.

5.3.2.2 Laufzettelanalyse

Es wurden nach Durchführung der Lernumgebung 13 Laufzettel abgegeben. Anzumerken ist noch, dass von diesen 13 nur 9 Antworten bei Station 4 gegeben haben, da sie mit dieser Station nicht fertig wurden. Es soll im Folgenden auf die grundsätzlichen Antworttendenzen auf die Fragen in Bezug auf die einzelnen Stationen eingegangen werden.

Station 1 fanden bis auf einen alle Schüler leicht, bei 2 waren es nur noch 9 und bei 3 sogar nur 4, die letzte Station fanden dann mit 8 Schülern wieder die meisten leicht. Dies entspricht auch den Erwartungen, da der Schwierigkeitsgrad bei den ersten 3 Stationen ansteigt. Bei Station 2 ist vermutlich der ungewohnte Umgang mit dem GTR bei vielen Schülern ein Problem. Station 3 ist schwieriger einzuschätzen, da hier nun nur noch Graphen und keine Terme mehr vorhanden sind und außerdem nicht mehr mit der Originalfunktion verglichen werden kann. Die letzte Station hatte dann wieder mehr Anhaltspunkte und fiel den Schülern vermutlich auch daher leichter, da ihnen diese Aufgaben - wie auch die der ersten Station - eher aus dem Unterrichtsalltag bekannt sind.

Die Frage nach der Klarheit der Aufgabe beantworteten bei allen Stationen die meisten Schüler mit ja; bei Station 1 und 2 war es jeweils nur ein Schüler, dem die Aufgabe nicht klar war, 3 und 4 waren allen klar.
Die Antworten auf die dritte Frage sind bei fast allen Stationen relativ ausgeglichen. Station 1 hat 7 Schülern Spaß gemacht und 6 nicht, bei Station 2 war es umgekehrt. Bei Station 3 hatten sogar 8 Schüler Spaß, was aber aufgrund des Spielcharakters voraussehbar war. Die 4. Station machte wieder etwa der Hälfte der Schüler Spaß. Diese Ergebnisse sind durchaus positiv zu bewerten, bedenkt man, dass es sich bei den Stationen 1,2 und 4 lediglich um relativ normale Schulaufgaben handelte, welche keinen besonderen Spielcharakter hatten.
Die Antworten auf die letzte Frage entsprechen allerdings weniger den Erwartungen. Bei Station 1 und 4 gaben jeweils nur 4 der Schüler an, etwas Neues gelernt zu haben, bei Station 3 haben 7 etwas Neues gelernt und bei 4 nur 3. Betrachtet man die Ergebnisse des Tests und auch die Schülerantworten, die während der Sicherung gegeben wurden, steht dies in einem Widerspruch. Es stellt sich nun die Frage, warum die Meinungen der Schüler so sehr von den gemachten Beobachtungen und ihren Testergebnissen abgewichen sind. Die Testergebnisse zeigen wie oben bereits erwähnt eine deutliche Verbesserung. Aus den Schülerantworten ist beispielsweise an der verwendeten Fachsprache auch zu erkennen, dass sie dies während der durchgeführten Stunden gelernt haben. Die Vermutung ist hier, dass die Schüler es nicht gewohnt sind eine Lernumgebung zu durchlaufen, in der weitgehend eine selbstständige Ergebnissicherung stattfindet. Den Schülern wurde bewusst nicht am Ende jeder Station klargemacht, was die Ergebnisse waren und was am Ende gelernt worden sein muss. Es wird daher davon ausgegangen, dass die Schüler eine strukturiertere Ergebnissicherung und Überprüfung benötigen, um sich selbst darüber klar zu werden, was sie gelernt haben und was Ziel der Stunde war. Gerade diese Zielsetzung muss vermutlich klarer herausgestellt werden. Es muss zudem berücksichtigt werden, dass es nur eine geringere Anzahl an Laufzetteln waren, die am Ende abgegeben wurden, was zu einer leichten Verfälschung der Ergebnisse führen kann. Für einen groben Eindruck der Schülermeinungen war dies aber durchaus aussagekräftig.
Abschließend soll noch auf die individuellen Eindrücke bei der Durchführung eingegangen werden.

5.3.2.3 Eindrücke der praktischen Durchführung

Auch wenn die Aussagen der Schüler auf dem Laufzettel abweichen, entstand während der Durchführung das ein oder andere Mal der Eindruck, dass die Aufgabenstellungen nicht ganz klar waren. Einige der Schüler hatten Fragen zur Durchführung, welches Material wozu gehört und ob sie beispielsweise allein oder in der Gruppe arbeiten sollen. Dies macht wahrscheinlich eine bessere Strukturierung der Arbeitsaufträge notwendig.

Zudem ist der Eindruck entstanden, dass die Schüler sich für die Ergebnissicherung bei Station 1 und 2 relativ wenig Zeit nahmen und vermutlich auch deshalb den Eindruck hatten, nichts Neues zu lernen. Die gemeinsame Ergebnissicherung muss in dieser Hinsicht also noch verbessert und mehr strukturiert werden. Dies kann innerhalb der Gruppen und am Ende im Plenum geschehen.

Die Schüler äußerten sich bei Station 2 sehr oft zur Nutzung des GTR und merkten an, dass sie den Umgang mit ihm nicht mögen würden, die Bedienung immer wieder vergessen und ähnliches. Eventuell müssen hier auch weitere Aufgabenvariationen oder Hilfegerüste gestaltet werden. Wobei dies vermutlich auch ein Problem ist, an dem längerfristig gearbeitet werden muss.

Bei der Durchführung von Station 3 ist aufgefallen, dass die Schüler sehr lange gebraucht haben und sich zum Teil nur schwer ein Ende fanden. Hier sind eventuell weitere Hilfestellungen notwendig oder weitere Möglichkeiten zur inneren Differenzierung. Dies würde auch dazu führen, dass am Ende mehr Zeit für die Station 4 bleibt.

Bei der letzten Station könnte es außerdem sinnvoll sein, eine konkretere Sicherung der Ergebnisse einzubauen, um den Schülern ihren eigenen Lernerfolg bewusst zu machen.

Es kann gesagt werden, dass die durch den Vortest herausgestellten Fehlkonzepte und Probleme mit dieser Lernumgebung in den meisten Fällen positiv beeinflusst werden konnten. Die dennoch festgestellten Mängel, die sich in der Praxis gezeigt haben, werden nun im nächsten Kapitel noch einmal angesprochen und innerhalb der Lernumgebung einbezogen, um diese zu verbessern.

Nachdem nun die Durchführung reflektiert wurde und Schwächen der Lernumgebung herausgestellt wurden soll es im nächsten Kapitel darum gehen, die Lernumgebung tatsächlich zu optimieren. Es werden Variationen aufgezeigt, die man als Lehrkraft vornehmen kann, um die Lernumgebung individuell an seine Lerngruppe anzupassen.

5.3.3 Überarbeitungs- und Variationsaspekte

Im Folgenden wird auf die einzelnen Unterrichtsphasen eingegangen, wobei eine Erläuterung erfolgt, welche Veränderungen vorgenommen wurden und zu welchem Zweck. Außerdem werden weitere Variationsaspekte aufgeführt, die eine individuellere Anpassung der Lernumgebungen möglich machen. Die finale Lernumgebung ist dann noch einmal in vollständiger Form im Anhang zu finden.

Die Methode an sich wird in der Überarbeitung beibehalten, da die Schüler gut zusammengearbeitet und sich gegenseitig geholfen haben. Der Lerneffekt war so vermutlich größer, als wenn die Erarbeitung im Plenum oder in Einzelarbeit stattgefunden hätte. Je nach Einschätzung der eigenen Lerngruppe kann dies natürlich bei einzelnen Aufgaben oder im Ganzen geändert werden. Eine Möglichkeit ist hier zum Beispiel eine stärkere Strukturierung des Ablaufes oder eine intensivere Zusammenarbeit der gesamten Lerngruppe. Man könnte immer alle dieselbe Station durchlaufen lassen und nach jeder eine kurze Plenumsphase mit gemeinsamer Sicherung einschieben.

5.3.3.1 Einstieg

Die Einstiegsfolie und die Art und Weise des Einstiegs wurde nicht verändert da dies in der Durchführung problemlos zu dem erwarteten Konflikt geführt hat und ein Übergang zu dem Stationenlernen so leicht möglich war. Je nachdem inwieweit die Lerngruppe solche Einstiege und stummen Impulse gewohnt ist, können natürlich mehr Fragen gestellt oder Anweisungen gegeben werden, wie zum Beispiel „beschreibt die Unterschiede“ oder ähnliches. Außerdem können natürlich auch Veränderungen vorgenommen werde, die das Erkennen der Zusammenhänge erschweren oder vereinfachen. So könnte zum Beispiel gleichzeitig die Skalierung und der Ursprung verändert werden oder tatsächlich eine andere Funktion genutzt werden, die durch Änderung der Skalierung aber aussieht wie $f(x)= x+2$.

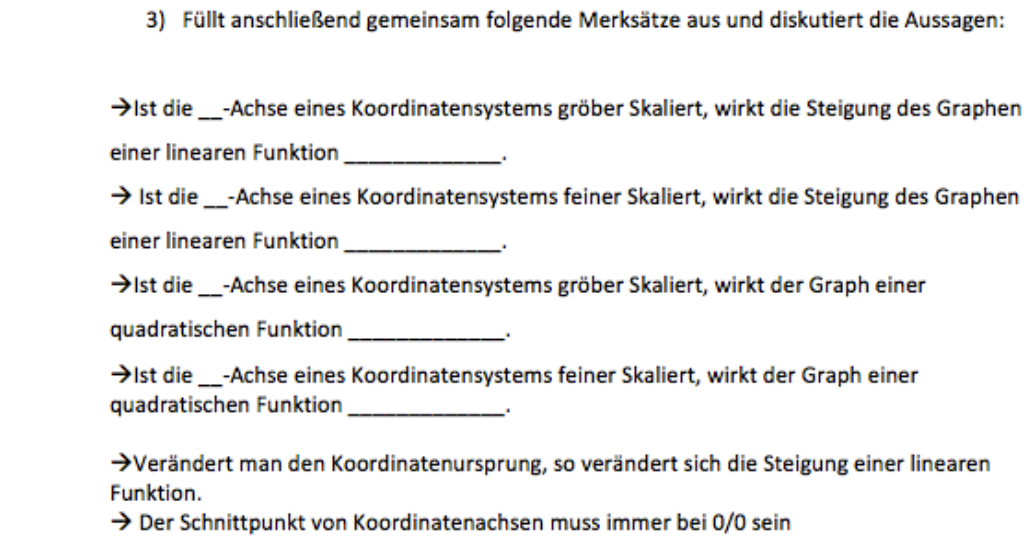
5.3.3.2 Station 1

Zunächst wurde deutlicher gekennzeichnet, welches Material für welche Aufgabe genutzt werden soll. Die Aufgaben wurden zum Teil zusammengefasst um mehr Übersichtlichkeit zu schaffen.[6] Der Hinweis nach der ersten Aufgabe wurde aus demselben Grund an den Anfang des Arbeitsmaterials verschoben.

Außerdem werden am Ende der Bearbeitung gemeinsam Merksätze ausgefüllt und über Aussagen diskutiert um eine bessere Sicherung zu gewährleisten. Gegebenenfalls können

[6] Vgl. Anhang

diese dann im Plenum besprochen werden und es kann exemplarisch die Veränderung der verschiedenen Funktionsgraphen im Plenum diskutiert werden. So werden die Schüler vermutlich auch eher ein Gefühl dafür bekommen, was sie gelernt haben.


3) Füllt anschließend gemeinsam folgende Merksätze aus und diskutiert die Aussagen:

→Ist die __-Achse eines Koordinatensystems gröber Skaliert, wirkt die Steigung des Graphen einer linearen Funktion _____.

→ Ist die __-Achse eines Koordinatensystems feiner Skaliert, wirkt die Steigung des Graphen einer linearen Funktion _____.

→Ist die __-Achse eines Koordinatensystems gröber Skaliert, wirkt der Graph einer quadratischen Funktion _____.

→Ist die __-Achse eines Koordinatensystems feiner Skaliert, wirkt der Graph einer quadratischen Funktion _____.

→Verändert man den Koordinatenursprung, so verändert sich die Steigung einer linearen Funktion.
→ Der Schnittpunkt von Koordinatenachsen muss immer bei 0/0 sein

Abbildung 41 Ergänzungen Station 1 - Merksätze

Eine weitere Veränderung wurde bei den vorgegebenen Wertetabellen gemacht. Diese zeigten in der ersten Fassung immer die gleichen Punkte und hatten die Intention die Schüler dazu zu bringen, selbstständig weitere Werte zu berechnen. Viele von ihnen taten dies in der Durchführung auch, es entstand jedoch der Eindruck, dass dies die Schüler eher von der eigentlichen Aufgabe ablenkte. Es wurde sich deshalb dazu endschieden, die Wertetabellen individuell zur Funktion passend zu gestalten. Es wurden dennoch weiterhin Lücken in der Tabelle gelassen um zu verhindern, dass die Schüler den Graphen völlig außer Acht lassen und nur unreflektiert die Werte der Tabelle eintragen. Dies verbessert die Fähigkeit zum Darstellungswechsel.
Um die Benötigte Zeit für das Berechnen der Werte möglichst gering zu halten, werden außerdem weiterhin nicht alle Lücken frei gelassen.
Je nach Lerngruppe kann natürlich auch die gesamte Station nach der Bearbeitung besprochen werden, wenn man sich nicht sicher sein kann, dass die Schüler eigenverantwortlich lernen. Außerdem kann der Schwierigkeitsgrad natürlich durch die Wahl anderer Funktionen und Veränderungen erhöht oder verringert werden. Es ist außerdem möglich Funktionen zu wählen, die zu dem gerade behandelten Thema passen. Beschäftigt man sich beispielsweise gerade mit Funktionen höheren Grades oder Exponentialfunktionen, macht es wahrscheinlich mehr Sinn, die Veränderungen anhand dieser zu betrachten. Man kann diese Station zudem insofern variieren, dass man

entweder alle Schüler nacheinander jeden Schwierigkeitsgrad oder nur eine Auswahl bearbeiten lässt. Natürlich können die Schwierigkeitsgrade auch fest zugeteilt werden und die Gruppenmitglieder von der Lehrkraft bestimmt werden. Genauso kann man auch alle nur einen Schwierigkeitsgrad bearbeiten lassen und dies anschließend besprechen. Eine weitere Möglichkeit ist es, nur eine Art der Veränderungen zu betrachten oder die Veränderungen komplexer zu gestalten. All dies ist davon abhängig, wie der Durchführende seine Lerngruppe einschätzt und welche Ziele mit der Lernumgebung verfolgt werden.

5.3.3.3 Station 2

Zunächst wurden auch bei dieser Station einige Änderungen vorgenommen, um die Übersichtlichkeit der Arbeitsaufträge zu verbessern. Die entsprechenden Aufgaben wurden den Materialien eindeutiger zugeordnet. Außerdem wurden die Aufgaben, die sich mit demselben Material beschäftigen, zusammengefasst. Es wurde bei Material 2 eine weitere Spalte für eine grobe Skizze des Taschenrechnerfensters geschaffen, um bei späterer Nutzung des Materials und bei der Besprechung mit den Mitschülern die Veränderungen besser zu erkennen und erklären zu können[7]. Da sich die Schüler zu dem Umgang mit dem Taschenrechner negativ äußerten und diese Aufgabe schwer fanden, wurde zusätzlich noch eine Hilfekarte erstellt, die gegebenenfalls bei Problemen mit Material 2 oder 3 genutzt werden kann. Sie gibt Anweisungen, wie die Werte verändert werden sollten, um nachvollziehbare Ergebnisse zu erhalten. Diese sollte aber nicht direkt mit den Aufgaben zur Verfügung gestellt werden, sondern nur bei Problemen beim Lehrer zu bekommen sein.

[7] Vgl. Anhang

☺ Hilfekarte zu Material 2 und 3 ☺:

Ist dein Koordinatenkreuz nicht mehr in der Mitte des Fensters?

Verändere die Werte von Xmin, Xmax, Ymin, Ymax so, dass....

... Xmin und Ymin immer negativ sind

...bei Xmin und Xmax sowie Ymin und Ymax jeweils der gleiche Wert steht

Kannst du dir die Veränderungen nicht erklären?

Fang langsam an, verändere zunächst nur Xmin und Xmax oder nur Ymin und Ymax und schau, was passiert. (Die anderen Werte bleiben erst einmal in der Standradeinstellung)

Abbildung 42 Ergänzungen Station 2 - Hilfekarte

Abschließend erhalten die Schüler auch hier die Aufgabe, die gegebenen Merksätze gemeinsam auszufüllen. Dies fasst die Erkenntnisse noch einmal zusammen, fördert den Reflektionsprozess und hilft noch einmal dabei, den Zusammenhang zwischen Skalierung und Aussehen der Funktionen zu erkennen. Außerdem kann so wieder relativ leicht eine gemeinsame Sicherung im Plenum stattfinden.

3) Füllt gemeinsam folgende Merksätze aus:

→ Sind die Werte Xmin und Xmax größer als die von Ymin und Ymax, größer, so wirkt die Steigung eines linearen Graphen _____.

→ Sind die Werte Xmin und Xmax kleiner als die von Ymin und Ymax, größer, so wirkt die Steigung eines linearen Graphen _____.

→ Sind die Werte Xmin und Xmax größer als die von Ymin und Ymax, größer, so wirkt ein quadratischer Graph _____.

→ Sind die Werte Xmin und Xmax kleiner als die von Ymin und Ymax, größer, so wirkt ein quadratischer Graph _____.

→durch die Veränderung der Werte ändert sich die _____der Achsen.

Abbildung 43 Ergänzungen Station 2 - Merksätze

Um diese Station individuell zu verändern können wieder die Funktionen schwieriger oder leichter gestaltet werden beziehungsweise solche verwendet werden, die sowieso gerade Gegenstand des Unterrichtes sind. Außerdem können - falls die Schüler sich mit der Thematik extrem schwertun - gemeinsam Manipulationen vorgenommen werden. Dazu könnte zum Beispiel eine Software des verwendeten Taschenrechners genutzt und

über den Beamer betrachtet werden. Zudem ist es möglich, den Anteil der Plenumszeit beliebig zu erhöhen und mehr Zeit für die Sicherung mit Allen gemeinsam einzuplanen. Auch weitere Hilfekarten mit weiteren Beispielen oder Werten, die die Schüler benutzen sollen, sind eine Anpassungsmöglichkeit.

Wie bereits zuvor erwähnt ist es jedoch so, dass die Arbeit mit dem GTR und dessen angemessene Bedienung ein langfristiges Ziel des Mathematikunterrichts sein sollte. Der richtige Umgang mit Problemen und die richtige Interpretation und Hinterfragung der Ausgaben des Rechners sollten kontinuierlich in den Unterrichtsalltag mit einbezogen werden.

5.3.3.4 Station 3

Das Hauptproblem bei Station 3 war, dass die Schüler sehr lange brauchten, um Paare zu finden. Auch zeigte die Auswertung der Laufzettel, dass vielen Schülern diese Station recht schwergefallen ist. Es ist jedoch so, dass es bei dieser Station sehr viele Möglichkeiten gibt, zu variieren, wie im Folgenden dargelegt wird. In der Überarbeitung wurden weitere Karten hinzugefügt. Es handelt sich dabei jeweils um den zugehörigen Funktionsterm und den Graphen im Standardkoordinatensystem zu jedem der vorhandenen Paare. Somit sind nun zahlreiche Varianten des Spiels möglich. Es können veränderte Koordinatensysteme dem Term zugeordnet werden oder diejenigen mit dem Standardkoordinatensystem einem Veränderten und so weiter. Zusätzlich kann den Schülern so auch eine Liste mit den Funktionstermen zur Verfügung gestellt werden, zu denen sie die Paare suchen sollen.

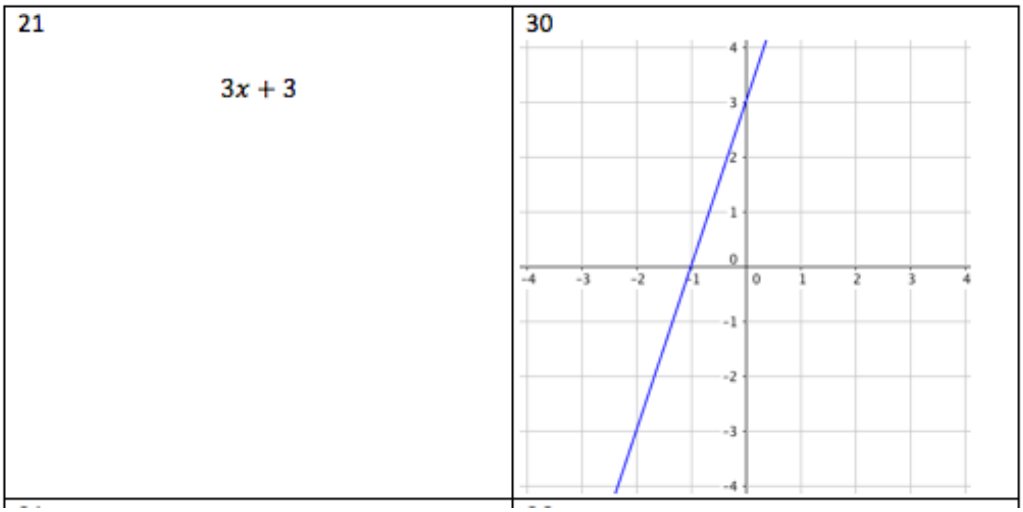


Abbildung 44 Ergänzungen Station 3 (Auszug) - Neue Memorykaten

Es ist nun auch möglich, entweder die Gruppen selbst entscheiden zu lassen, welche Variante sie spielen wollen, oder es als Lehrkraft im Vorfeld festzulegen.

Als weitere Möglichkeit der Verbesserung wurde auch hier eine Hilfekarte angefertigt, die das Spiel vereinfacht, wenn eine Gruppe völlig erfolglos ist. Diese sollte der Gruppe aber nicht von Anfang an zur Verfügung stehen, damit sie es erst einmal ohne probieren.

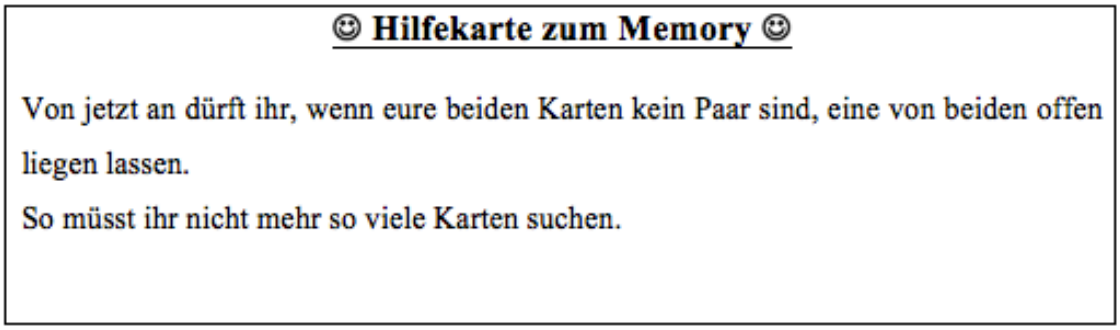


Abbildung 45 Hilfekarte Station 3

Ein weiterer Punkt der verändert worden ist, ist die letzte Frage nach dem GTR, da dieser in der Durchführung die Schüler eher verwirrt hat und von der eigentlichen Aufgabe abgelenkt hat. Es wurde außerdem auch hier die Sozialform genauer gekennzeichnet, um eine Einheitlichkeit zu den anderen Stationen zu schaffen.

5.3.3.5 Station 4

Bei der letzten Station wurden zunächst wieder die Sozialformen ergänzt und bei der ersten Aufgabe wurde hinzugefügt, dass zunächst alleine und im Anschluss verglichen und überprüft werden soll, da die Schüler dies in der Durchführung nicht verstanden haben. Am Ende dieser Station sollen wieder Merksätze ausgefüllt werden, um das Gelernte zusammenzufassen und den Schülern bewusst zu machen.

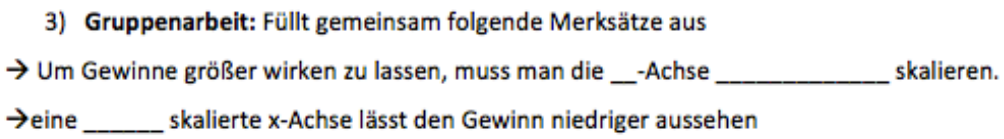


Abbildung 46 Ergänzungen Station 5 - Merksätze

Außerdem gewöhnen sich die Schüler so an die bestimmten Fachausdrücke und Ausdrucksweisen. Um diese Station noch mehr zu variieren können zum Beispiel weitere Kontexte gewählt werden. Auch sind Aufgaben, die der sechsten Aufgabe des Vor- und Nachtestes ähneln eventuell sinnvoll, um dies noch einmal zu vertiefen.

5.3.3.6 Sicherung

Die abschließende Sicherung wird insofern verändert, dass hier nun vorgesehen ist, die erstellten Merksätze zu besprechen. Dies soll am Ende gebündelt geschehen, um den

Arbeitsfluss während der Erarbeitungsphase nicht zu stören. Hierfür wurden noch zwei weitere Folien erstellt, auf denen die Merksätze noch einmal insgesamt aufgeführt worden sind.[8] Natürlich kann dies aber auch mündlich oder an der Tafel besprochen werden.

Erst im Anschluss daran wird dann noch einmal die Einstiegsfolie aufgelegt und diskutiert, ob sich die Meinung der Gruppe verändert hat. Je nach Lerngruppe kann dies variiert werden. Für manche mag es leichter sein, die Sicherung jedes Mal nach dem Vollenden einer Station durchzuführen, wenn die Schüler sich gedanklich noch in der aufgabenspezifischen Thematik befinden. Außerdem wird es für manche Klassen leichter sein, am Anfang der Stunde schriftlich Vermutungen - zum Beispiel an der Tafel - festzuhalten und diese dann am Ende zu reflektieren.

Die Lernumgebung war schon in ihrer ersten Version, wie der Test und die anderen Beurteilungsmaßnahmen zeigten, recht erfolgreich, es traten jedoch an der ein oder anderen Stelle Unstimmigkeiten auf.

Abschließend kann gesagt werden, dass die so optimierte Lernumgebung vermutlich zu einem besseren Arbeitsablauf führt und viele der Unverständlichkeiten und Probleme, die während der ersten Durchführung aufgetreten sind, eliminiert. Für die praktische Durchführung ist zu beachten, dass die Lernumgebung durchaus auch schon für Schüler jüngeren Alters geeignet ist, und somit in die zu Beginn angesprochenen Anforderungen des Kernlehrplans der Jahrgangsstufe 9 passt. Je nachdem, wie die Funktionen angepasst werden, ist aber auch eine Durchführung in älteren Jahrgangsstufen möglich.

Es sollte jedoch immer bedacht werden, dass eine Schülergruppe nie der anderen gleicht und man daher vermutlich nicht alles eins zu eins übernehmen kann, wenn es um eine andere Lerngruppe geht. Durch die zahlreichen Anregungen zu Veränderungen sollte dies in diesem Kapitel betont und möglich gemacht werden.

[8] Vgl. Anhang

6 Fazit und Ausblick

Bereits der zu Beginn des Projekts durchgeführte Test hat gezeigt, dass die Vermutungen über das konzeptuelle Verständnis von Koordinatensystemen sich auch in der Praxis bestätigen: Die Schüler zeigten viele Probleme mit den für sie ungewohnten Darstellungen und waren nur selten in der Lage Skalierungen zu erkennen oder zu interpretieren. Die Probleme mit den veränderten Koordinatenursprüngen waren sogar noch größer.

Die verbindliche Einführung des Graphiktaschenrechners ist ein Schritt, der durchaus gerechtfertigt ist, um einen zeitgemäßen Mathematikunterricht zu gewährleisten. Es ist jedoch so, dass neben den Vorteilen auch Probleme entstehen, die bisher nur wenig bedacht worden sind. Es entsteht der Eindruck, dass an einigen Stellen die praktische Umsetzung zu wenig durchdacht und nicht berücksichtigt worden ist, welch großen Einfluss die Einführung auf die anderen Elemente des Unterrichts sowie die Schüler selbst hat.

Dadurch sind Probleme und offene Fragen entstanden, die zuvor keine Rolle gespielt haben. Die Ergebnisse des Vortests bestätigen dies.

Die im Anschluss an den Test erstellte Lernumgebung zielt darauf ab, die Schüler genau auf den Umgang mit solchen neuen Problemen vorzubereiten. Durch die Überprüfung des Erfolges und anschließendes Re-Design soll sichergestellt werden, dass Probleme eliminiert werden, die beim ersten Design nicht aufgefallen sind, sich aber in der praktischen Durchführung gezeigt haben.

Die resultierende Lernumgebung stellt eine praxistaugliche Möglichkeit dar, den Schülern bei entstehenden Problemen, die durch Einführung des GTR entstanden sind, zu helfen. Sie setzen sich mit den veränderten Aufgabenformaten auseinander und bekommen die Möglichkeit, sich langsam und Spielerisch an sie zu gewöhnen. Außerdem erfahren sie aktiv, welche Veränderungen der GTR mit sich bringt und werden sich aber auch der Vorteile bewusst. Sie lernen, dass sie so schneller Zwischen Darstellungen wechseln können und erfahren direkt, wie diese miteinander in Verbindung stehen.

Außerdem fördert sie so das konzeptuelle Verständnis von Koordinatensystemen, welches, dadurch, dass es in der Vergangenheit schlicht nicht nötig war, bei den Schülern nicht hinreichend ausgebildet ist. Zudem wurden zahlreiche Möglichkeiten aufgezeigt, die Lernumgebung noch weiter zu verändern beziehungsweise an eine Lerngruppe individuell anzupassen.

Um die Lernumgebung noch weiter zu verbessern und weitere Fehler aufzudecken, wäre es sicherlich sinnvoll, diese erneut an einer weiteren Lerngruppe zu testen. So würden zum einen weitere Probleme in der praktischen Durchführung aufgedeckt werden. Zum anderen wäre dann die Schülergruppe wieder eine andere, was die Allgemeingültigkeit erhöhen würde, da die Gruppe der Probanden größer wird.

Neben der Lernumgebung an sich gibt es außerdem noch weitere Punkte die in der Zukunft untersucht werden sollten.

Zuerst ist es natürlich so, dass die Lernumgebung nur einen kleinen Teil der Probleme abdeckt, die durch die Einführung des GTR auf die Schule zugekommen sind. Zahlreiche Studien, unter anderem auch die von Cavanagh und Mitchelmore, die bereits in Kapitel 2.2.2 eine Rolle gespielt hat, haben weitere Punkte aufgedeckt, die im Unterrichtsalltag problematisch werden: Als Beispiel sei hier die Tatsache gegeben, dass - bedingt durch die zum Teil schlechte Auflösung - der GTR zum Teil Strecken gerade darstellt, die eigentlich eine Krümmung haben.

Eines der größten Probleme ist zudem, dass Schüler das auf dem GTR Abgebildete nicht hinterfragen und nicht mit den anderen Darstellungsformen in Verbindung bringen (Cavanagh & Mitchelmore, 2000b). Gerade mit dieser Problematik muss sich dringend im Unterricht beschäftigt werden, damit es nicht zu Fehlvorstellungen kommt.

Das zeigt, dass es noch zahlreiche weitere Aspekte in Bezug auch die Nutzung des GTR im Schulalltag gibt, an denen Forschungsbedarf besteht und für die alltagstaugliche Lösungen gefunden werden müssen.

Zusätzlich muss seitens der Praxis daran gearbeitet werden, den Umgang mit dem GTR mehr in den Unterrichtsalltag zu integrieren und es den Schülern möglich zu machen, ihn im Schulalltag zu nutzen. Bei der praktischen Durchführung der Lernumgebung wurde teilweise deutlich, dass Schüler das Nutzen des GTR als zusätzliche Belastung sehen und den Umgang mit ihm nicht mögen. Der GTR muss ein natürlicher Teil des Schulalltags werden und darf nicht mehr als erschwerendes Beiwerk fungieren. Dies hat natürlich zur Folge, dass der problemlose Umgang mit ihm geübt werden muss. Auch hierfür muss Raum und Material geschaffen werden. Zudem muss der Umgang für die Schüler attraktiver gestaltet werden und ihnen muss gezeigt werden, dass sie auch davon profitieren können.

Zuletzt ist es notwendig, die weiteren Medien des Unterrichtsalltags so umzugestalten, dass auch hier die Nutzung des GTR integriert wird. Wie schon zu Beginn des Projektes Dargestellt sind beispielsweise die gängigen Schulbücher nur mit

Standardkoordinatensystemen ausgestattet. Mit der Integration des GTR wird aber auch hier eine Anpassung notwendig.

Fasst man die Ergebnisse des Projektes zusammen, so kann gesagt werden, dass bedingt durch Problemanalyse, Testung und Überarbeitung eine Lernumgebung geschaffen wurde, mit der durch den GTR bedingte Probleme verringert werden. Zudem wird der konkrete Umgang mit dem und die Bedienung des Taschenrechners geübt.

Vor allem vermittelt sie erfolgreich einen Teil der Kompetenzen, die durch die Einführung des GTR zusätzlich beherrscht werden müssen. Es wurde somit ein praxisnahes Instrument geschaffen, welches im Unterrichtsalltag eingesetzt werden kann und bei der erfolgreichen Integration es GTRs in den Schulalltag genutzt werden kann.

Es ist dennoch zu bedenken, dass stets eine Anpassung an die individuelle Lerngruppe vorgenommen werden sollte.

Außerdem gibt es weitere Punkte, die diese gar nicht abdeckt, die aber für eine erfolgreiche Integration des GTR ebenso notwendig sind. Ein Beispiel dafür ist das Kritische hinterfragen der Rechnerergebnisse, welches bereits Erwähnung gefunden hat. Dennoch ist so ein erster Schritt in Richtung eines sinnvollen und produktiven Umgangs mit dem GTR im Schulgeschehen gemacht worden.

Literaturverzeichnis

Anderson, T., & Shattuck, J. (2012). Design-Based Research: A Decade of Progress in Education Research? *Educational Researcher, 41*(1), S. 16-25.

Büchter, A. (2008). Funktionale zusammenhänge erkunden. *Mathematik lehren, 148*, S. 4-10.

Barab, S., & Squire, K. (2004). Design-Based Research: Putting a Stake in the Ground. *The Jurnal of the Learning Sciences, 13*(1), S. 1-14.

Barzel, B. (2012). *Cotmputeralgebra im Mathetmatikunterricht. Ein Mehrwert - aber wann?* Münster: Waxmann.

Barzel, B., & Greefrath, G. (2015). Digitale Werkzeuge sinnvoll integrieren. In W. Blum, *Bildungsstandards Mathematik: konkret - Sekundarstufe II* (S. 141-153). Berlin: Cornelsen Scriptor.

Barzel, B., Büchter, A., & Leuders, T. (2015). *Mathematik Methodik. Handbuch für die Sekundarstufe l und ll* (8 Ausg.). Berlin: Cornelsen Schulverlage.

Brown, A. (1992). Design Eperiments: Theoretical und Methological Challenges in Creating Complex Interventions in Classroom Settings. *The Jurnal of the Learning Sciences, 2*(2), S. 141-178.

Cavanagh, M., & Mitchelmore, M. (2000a). Graphics Calculators in Mathematics Learning: Studies of Students and Teacher Unterdstanding.

Cavanagh, M., & Mitchelmore, M. (2000b). Student misconceptions in interpreting basic· graphic calculator displays. In T. Nakahara, & M. Koyama, *24th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (S. 161-168). Hiroschima: PME.

Edelson, D. (2002). Design Research: What We Learn When We Engage in Design. *The Jurnal of the Lerarning Sciences, 11*(1), S. 105-121.

Joseph, D. (2004). The Practice of Design-Based Research: Uncovering the Interplay Between Design, Research, and the Real-World Context. *Educational Psychologist, 39*(4), S. 235-242.

Kelly, A. (2003). Research as Design. *Educational Researcher, 32*(1), S. 3-4.

Kerres, M. (1999). Didaktische Konzeption multimedialer und telemedialer Lernumgebungen. *HMD – Praxis der Wirtschaftsinformatik*, S. 1-9.

Klinger, M. (2017). *Funktionales Denken beim Übergang von der Funktionenlehre zur Analysis: Entwicklung eines Testinstruments und empirische Befunde aus der gymnasialen Oberstufe.* . Wiesbaden: Springer Spektrum.

Klinger, M., & Thurm, D. (2016). Zwei Graphen aber eine Funktion? - Konzeptuelles Verständnis von Koordinatensystemen mit digitalen Werkzeugen entwickeln. *TFS, 2*, S. 225-232.

Kuntze, S. (2006). Konzeption einer Lernumgebung für den gymnasialen Mathematikunterricht und Evaluation einer Themenstudienarbeit zum mathematischen beweisen und Argumentieren. München: Ludwig-Maximilians-Universität München.

Laakmann, H. (2013). *Darstellungen und Darstellungswechsel als Mittel zur Begriffsbildung Eine Untersuchung in rechnerunterstützten Lernumgebungen.* Wiesbaden: Springer Fachmedien.

Leuders, T. (2005). Funktionierts? Denken in Funktionen. *Praxis Mathematik, 47*(2), S. 1-7.

Malle, G. (2000). Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnung und Kovariation. *Mathematik lehren*(103).

Maroska, R., Olpp, A., Pongs, R., Stöckle, C., & Wellstein, H. (2009). *Schnittpunkt 10 Mathematik, Nordrhein-Westfalen.* Sturrgart: Ernst Klett Verlag GmbH.

Mingfong, J., San, C., & Ming, T. (2010). Unpacking the design process in design-based research. In S. Goldmann, J. Pellegrino, K. Gomez, L. Lions, & J. Radinsky, *Proceedings of the International Conference of the Learning Sciences (ICLS)* (S. 470-471). Illinois: International Society of the Learning Sciences.

Ministerium für Schule und Weiterbildung. (27. Juni 2012). *Gebrauch von graphikfähigen Taschenrechnern im Mathematikunterricht der gymnasialen Oberstufe und des Beruflichen Gymnasiums.*

Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen. (2017). *Vorgaben Zentralabitur 2017 – Mathematik.*

Ministerium für Schule und Weiterbildung, NRW. (2007). *Kernlehrplan für das Gymnasium - Sekundarstufe I (G8) in Nordrheinwestfalen Mathematik.* Frechen: Ritterbach Verlag.

Mitchelmore, M., & Cavanagh, M. (2000). Students' Difficulties in Operating a Graphics Calculator. *Mathematics Education Research Journal, 12*(3), S. 254-268.

Reinmann, G. (2005). Innovation ohne Forschung? Ein Plädoyer für den Design-Based Research-Ansatz in der Lehr-Lernforschung. *Unterrichtswissenschaft, 33*(1), S. 52-69.

Reinmann-Rothmeier, G., & Mandl, H. (2001). Unterrichten und Lernumgebungen gestalten. In A. Krapp, & B. Weidenmann, *Pädagogische Psychologie* (S. 601-646). Weinheim: Beltz.

Vollrath, H. (1989). Funktionales Denken. *Journal für Mathematik-Didaktik, 10*(1), S. 3-37.

Vom Hofe, R. (1992). Grundvorstellungen mathematischer Inhalte als didaktisches Modell. *Journal für Mathematik-Didaktik, 13*(4), S. 345-364.

vom Hofe, R. (2003). Grundbildung durch Grundvorstellungen. *Mathematik lehren*(118), S. 4-8.

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1 Zuordnung und Kovariation anhand verschiedener Darstellungsformen (Malle, 2000) 14
Abbildung 2 Ausbilden von Grundvorstellungen (nach Vom Hofe, 1992) 17
Abbildung 3 simultane Veränderungen in den Darstellungsformen anhand des GTR (nach Laakmann, 2013) 21
Abbildung 4 Auswirkungen des Wechsels innerhalb einer Darstellungsform (nach Laakmann, 2013) 21
Abbildung 5 Theoretischer Ablauf eines DBR-Forschungsprozesses (modifiziert nach Reinmann, 2005) 32
Abbildung 6 Schulbuchbeispiel 1 (Maroska, Olpp, Pongs, Stöckle, & Wellstein, 2009) 37
Abbildung 7 Schulbuchbeispiel 2 (Maroska, Olpp, Pongs, Stöckle, & Wellstein, 2009) 37
Abbildung 8 Aufgabe 1 des Vortests 40
Abbildung 9 Aufgabe 2 des Vortests 41
Abbildung 10 Aufgabe 3a des Vortests 42
Abbildung 11 Aufgabe 3b des Vortests 43
Abbildung 12 Aufgabe 4 des Vortests 43
Abbildung 13 Aufgabe 5 des Vortests (in Anlehnung an Klinger & Thurm, 2016) 44
Abbildung 14 Aufgabe 6 des Vortests 45
Abbildung 15 Antwortbeispiel Aufgabe 1 Schüler ÄL07 51
Abbildung 16 Antwortbeispiel Aufgabe 2 Schüler UN11 52
Abbildung 17 Antwortbeispiel Aufgabe 2 Schüler OA12 53
Abbildung 18 Antwortbeispiel Aufgabe 2 Schüler AB10 53
Abbildung 19 Antwortbeispiel Aufgabe 3a, Schüler AL04 54
Abbildung 20 Antwortbeispiel Aufgabe 3b, Schüler NU09 54
Abbildung 21 Antwortbeispiel Aufgabe 3b, Schüler AS03 55
Abbildung 22 Antwortbeispiel Aufgabe, 4 Schüler AM03 55
Abbildung 23 Antwortbeispiel Aufgabe 4, Schüler AD10 56
Abbildung 24 Antwortbeispiel Aufgabe 4, Schüler ER06 56
Abbildung 25 Antwortbeispiel Aufgabe 5, Schüler ÄL07 57

Abbildung 26 Antwortbeispiel Aufgabe 5, Schüler ER06 58
Abbildung 27 Antwortbeispiel Aufgabe 6, Schüler UN11 58
Abbildung 28 Antwortbeispiel Aufgabe 6, Schüler AB10 59
Abbildung 29 Einstiegsfolie der Lernumgebung 63
Abbildung 30 Laufzettel (in Anlehnung an (Barzel, Büchter, & Leuders, 2015) 64
Abbildung 31 Folie der allgemeinen Arbeitsaufträge 64
Abbildung 32 Arbeitsaufträge Station 1 66
Abbildung 33 Auszug Materialien Station 1 66
Abbildung 34 Arbeitsaufträge Station 2 67
Abbildung 35 Material 1 Station 2 68
Abbildung 36 Material Station 2 69
Abbildung 37 Auszug Materialien Station 2 69
Abbildung 38 Arbeitsaufträge Station 3 70
Abbildung 39 Auszug Memorykarten Station 3 70
Abbildung 40 Arbeitsaufträge Station 4 72
Abbildung 41 Ergänzungen Station 1 - Merksätze 79
Abbildung 42 Ergänzungen Station 2 - Hilfekarte 81
Abbildung 43 Ergänzungen Station 2 - Merksätze 81
Abbildung 44 Ergänzungen Station 3 (Auszug) - Neue Memorykaten 82
Abbildung 45 Hilfekarte Station 3 83
Abbildung 46 Ergänzungen Station 5 - Merksätze 83

Tabellenverzeichnis

Tabelle 1 Vielfältige Tätigkeiten beim Darstellungswechsel (modifiziert nach Leuders, 2005) 12
Tabelle 2 Tätigkeiten beim Darstellungswechsel von Funktionen nach Leuders 2005 (entnommen aus Laakmann, 2013) 13
Tabelle 3 Darstellungen und Grundvorstellungen zu linearen Funktionen, in Anlehnung an Hußmann/Laakmann 2011, S. 7 (entnommen aus Laakmann, 2013) 15
Tabelle 4 Grundlegende Kompetenzen des Vortests 38
Tabelle 5 Ergebnisübersicht des Vortests 47
Tabelle 6 ergänzende Kompetenzen in Bezug auf den GTR 61
Tabelle 7 Grober Ablaufplan der Lernumgebung 62
Tabelle 8 Ergebnisübersicht des Nachtests 74

Anhang

1 Vor- und Nachtest

Vorwissenstest Koordinatensysteme

Hallo ☺
Dieser Test ist eine anonyme Erhebung für eine wissenschaftliche Arbeit. Deine Lösungen werden also nicht benotet und auch nicht an deine Lehrerin oder deinen Lehrer weitergeleitet. Damit ich deinen Test später zuordnen kann, bitte ich dich, den folgenden Code zu erstellen und unten einzutragen.

1. Kasten: Zweiter Buchstabe des Vornamens deiner Mutter
2. Kasten: Dritter Buchstabe deines Vornamens
3. Kasten: Dein Geburtsmonat in Ziffern

Beispiel: Meine Mutter heißt **ULLA**; ich heiße **CARO** und bin im **MÄRZ (03)** geboren:

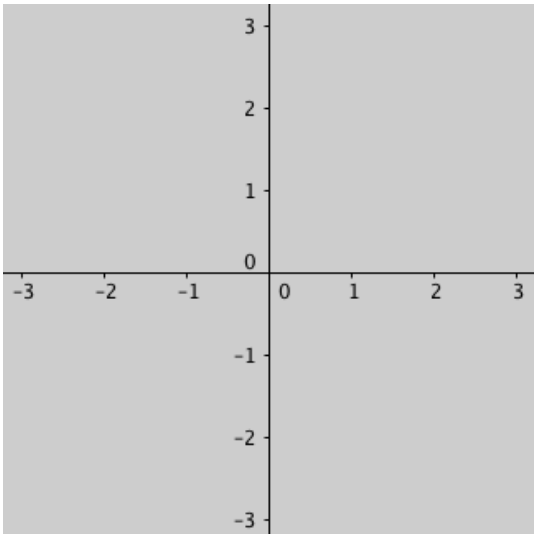
L	**R**	**03**

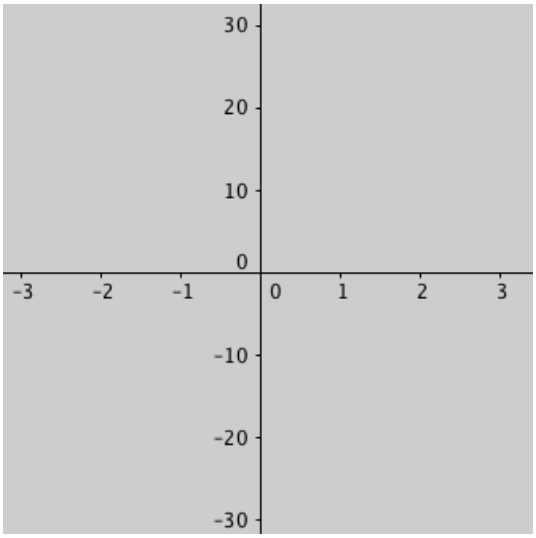
Dein Code ist also:

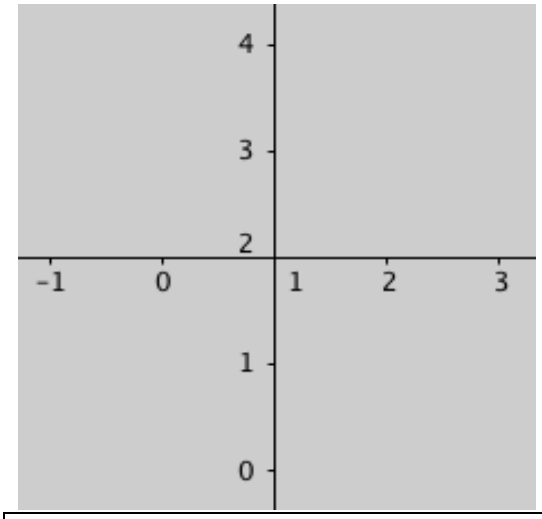
Wichtig sind bei deinen Lösungen vor allem deine Begründungen und nicht, ob deine Antwort richtig oder falsch ist. Es wäre also nett, wenn du alle deine Entscheidungen und Ergebnisse erklärst. Falls du mehr Platz brauchst, kannst du die Rückseiten benutzen.

Vielen Dank für deine Teilnahme!!!

Aufgabe 1





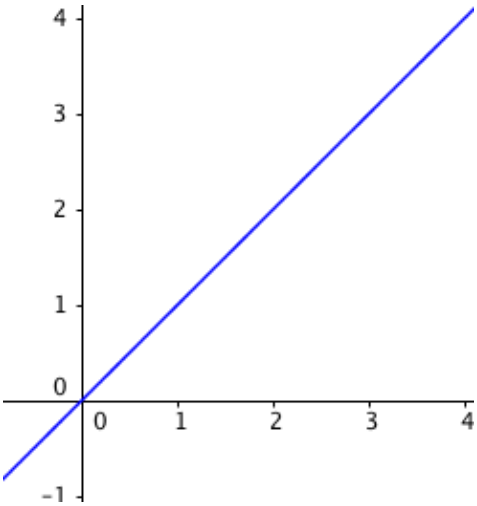


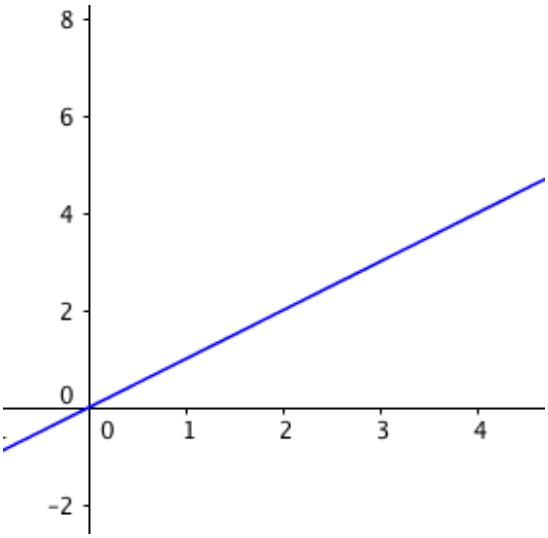
Hier siehst du drei Koordinatensysteme, ist eines (oder mehrere) davon falsch? Wenn ja, warum?

Antwort:

Aufgabe 2

Lisa behauptet, dass beide abgebildeten Graphen die Funktion $f(x) = x$ zeigen.



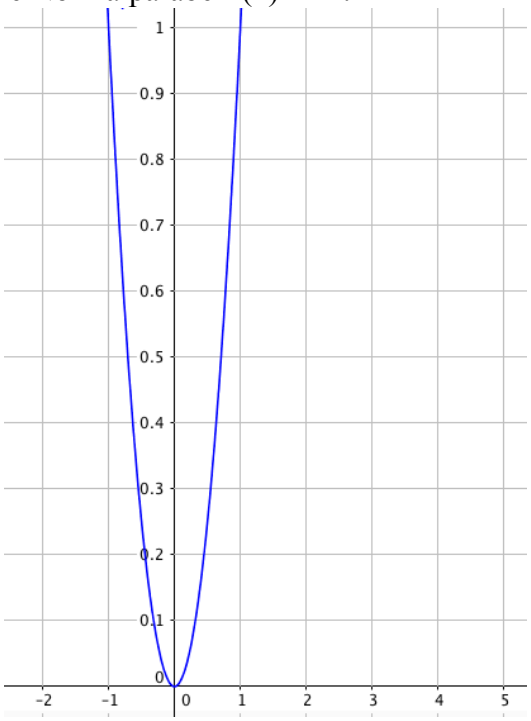


Was sagst du dazu? Begründe.

Antwort:

Aufgabe 3

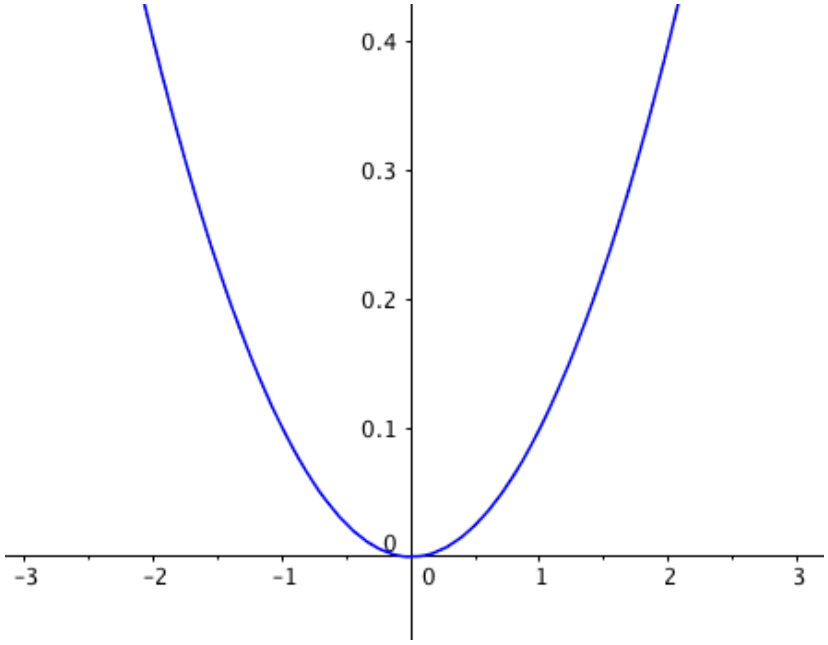
a) Handelt es sich um die Normalparabel $f(x) = x^2$?



Begründe deine Entscheidung.

Antwort:

b) Passt der abgebildete Graph zu der Funktionsgleichung $f(x) = \frac{1}{2}x^2$?

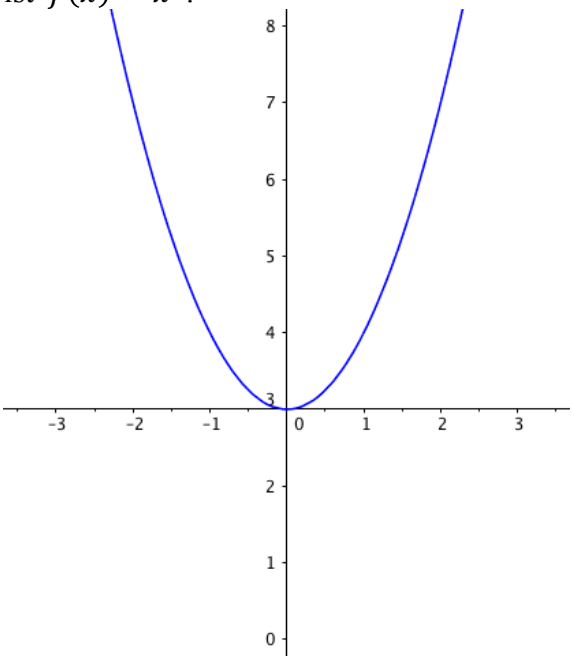


Begründe deine Entscheidung.

Antwort:

Aufgabe 4

Paul behauptet, dass dieser Graph die Funktion $f(x) = x^2 + 3$ darstellt, Fritz sagt, es ist $f(x) = x^2$.

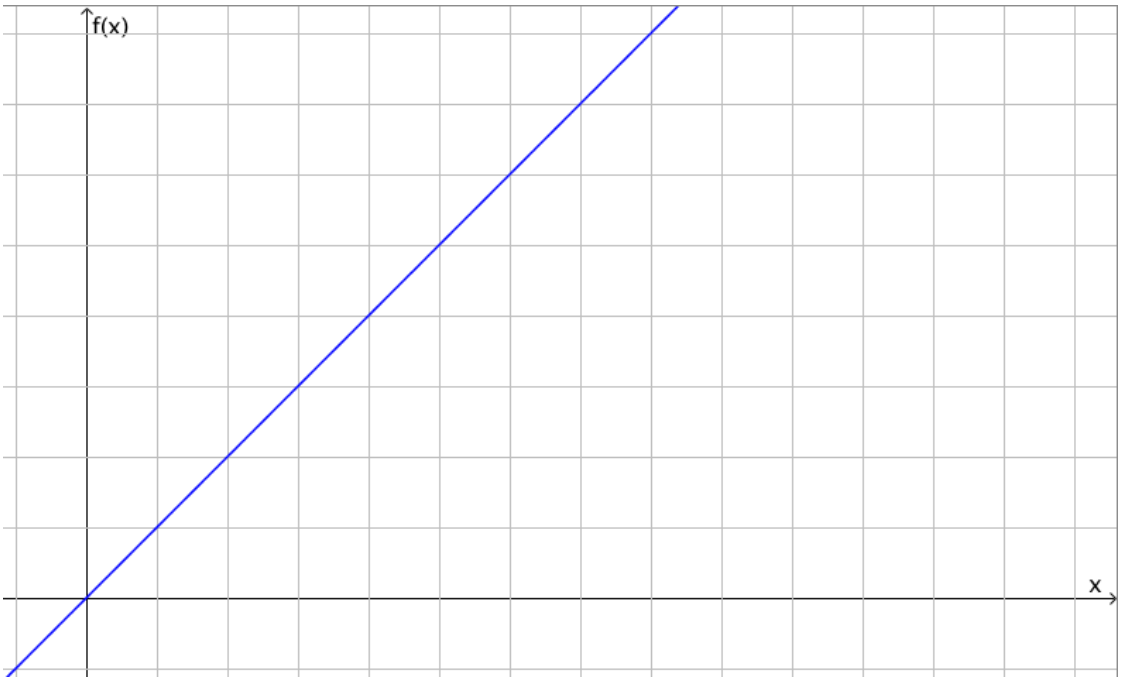


Wer von beiden hat recht oder hat keiner recht? Begründe deine Antwort.

Antwort:

Aufgabe 5

Beschrifte die Achsen so, dass die blaue Gerade dem Term $f(x) = 2x$ entspricht.

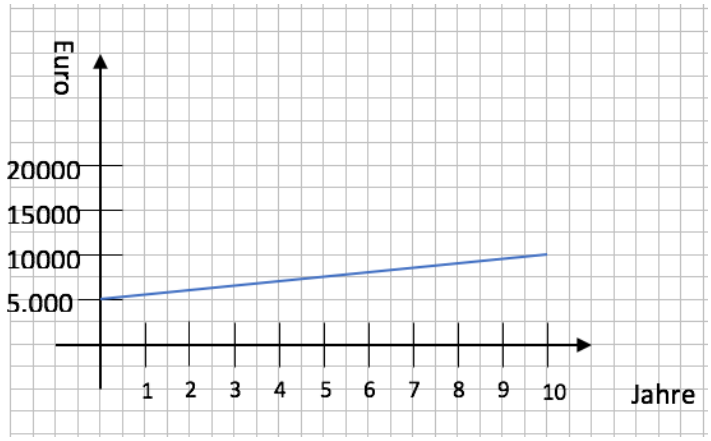


Falls du etwas anmerken möchtest, kannst du dies hier tun:

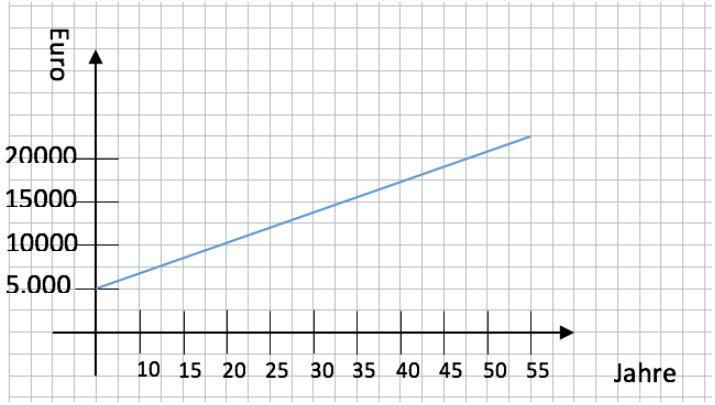
Aufgabe 6

Herr Müller hat Geld geerbt und ist nun auf der Suche nach einer geeigneten Anlagemöglichkeit, um möglichst schnell Gewinn zu machen. Er hat nun recherchiert und zwei Möglichkeiten gefunden, die für ihn in Frage kommen. Beide Anbieter zeigen ihm einen Graphen, der den Gewinnzuwachs über den Verlauf von mehreren Jahren darstellt.

Anbieter A:



Anbieter B:



Zu welchem Anbieter würdest du Herrn Müller raten? Begründe deine Entscheidung.

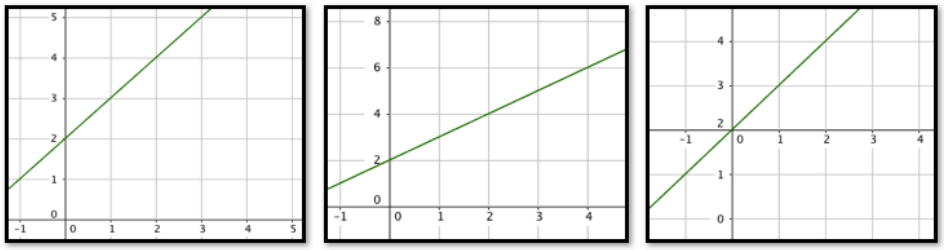
Antwort:

2 Materialien der finalen Lernumgebung

2.1 Einstiegsfolie, Arbeitsaufträge und Merksätze

Drei Graphen aber die gleiche Funktion?

Lisa behauptet, dass alle drei abgebildeten Graphen die Funktion **f(x)=x+2** darstellen.



Arbeitsaufträge Lerntheke:

- Bildet Gruppen mit möglichst 5 (nicht mehr) Personen
- Setzt euch an Tischgruppen
- Bearbeitet die verschiedenen Stationen.
  - zuerst 1 und 2, die Reihenfolge ist egal
  - 3 und 4, wenn 1 und 2 bearbeitet sind, die Reihenfolge ist egal
- Zeit: Pro Station 15-20 Minuten
- Die Materialien befinden sich vorne, je einer aus der Gruppe kann sie nach beenden der vorherigen Station abholen

Merksätze Station 1

→Ist die __-Achse eines Koordinatensystems gröber Skaliert, wirkt die Steigung des Graphen einer linearen Funktion _____.

→ Ist die __-Achse eines Koordinatensystems feiner Skaliert, wirkt die Steigung des Graphen einer linearen Funktion _____.

→Ist die __-Achse eines Koordinatensystems gröber Skaliert, wirkt der Graph einer quadratischen Funktion _____.

→Ist die __-Achse eines Koordinatensystems feiner Skaliert, wirkt der Graph einer quadratischen Funktion _____.

→Verändert man den Koordinatenursprung, so verändert sich die Steigung einer linearen Funktion.

→ Der Schnittpunkt von Koordinatenachsen muss immer bei 0/0 sein

Merksätze Station 2

→ Sind die Werte Xmin und Xmax größer als die von Ymin und Ymax, größer, so wirkt die Steigung eines linearen Graphen _____.

→ Sind die Werte Xmin und Xmax kleiner als die von Ymin und Ymax, größer, so wirkt die Steigung eines linearen Graphen _____.

→ Sind die Werte Xmin und Xmax größer als die von Ymin und Ymax, größer, so wirkt ein quadratischer Graph _____.

→ Sind die Werte Xmin und Xmax kleiner als die von Ymin und Ymax, größer, so wirkt ein quadratischer Graph _____.

→durch die Veränderung der Werte ändert sich die _____der Achsen.

Merksätze Station 4

→ Um Gewinne größer wirken zu lassen, muss man die __-Achse _____ skalieren.

→eine _____ skalierte x-Achse lässt den Gewinn niedriger aussehen

2.2 Laufzettel

Laufzettel zur Lerntheke: Viele Graphen aber eine Funktion

Füllt bitte nach Bearbeitung jeder Station den Laufzettel aus.

Name der Station	**War es leicht?**		**War die Aufgabe klar?**		**Hat es Spaß gemacht?**		**Hast du Neues gelernt?**	
	Ja	**Nein**	**Ja**	**Nein**	**Ja**	**Nein**	**Ja**	**Nein**
Station 1: Vom Wert zum Graphen								
Station 2: GTR Experimente								
Station 3: Funktionenmemory								
Station 4: Anbieter								

Hast du sonst noch Anmerkungen:

Vielen Dank für deine Teilnahme!!!

2.3 Station 1

Station 1:
Vom Wert zum Graphen

Aufgaben:

1) **Einzelarbeit:** Sucht euch je eine der Schwierigkeitsgrade (Material 1) aus und tragt die Werte in die verschiedenen Koordinatensysteme ein, um den entsprechenden Graphen zu zeichnen

   Einzelarbeit: Beantwortet in die folgenden Fragen:
   - Was ist das besondere an euren Koordinatensystemen?
   - Was verändert sich, was bleibt gleich?

Hinweis: *das erste Koordinatensystem ist jeweils das „Normale", also das, was du aus dem Unterricht gewohnt bist. Hier brauchst du die Fragen nicht beantworten.*

2) **Gruppenarbeit:** Stellt euch gegenseitig eure verschiedenen Graphen und deren Auffälligkeiten vor und korrigiert Fehler/beantwortet Fragen eurer Gruppenmitglieder.

3) Füllt anschließend gemeinsam folgende Merksätze aus und diskutiert die Aussagen:

→Ist die __-Achse eines Koordinatensystems gröber Skaliert, wirkt die Steigung des Graphen einer linearen Funktion _____.
→ Ist die __-Achse eines Koordinatensystems feiner Skaliert, wirkt die Steigung des Graphen einer linearen Funktion _____.
→Ist die __-Achse eines Koordinatensystems gröber Skaliert, wirkt der Graph einer quadratischen Funktion _____.
→Ist die __-Achse eines Koordinatensystems feiner Skaliert, wirkt der Graph einer quadratischen Funktion _____.

→Verändert man den Koordinatenursprung, so verändert sich die Steigung einer linearen Funktion.
→ Der Schnittpunkt von Koordinatenachsen muss immer bei 0/0 sein

Für Schnelle:

- Tragt die Funktionen in weitere, eigene Koordinatensysteme ein.

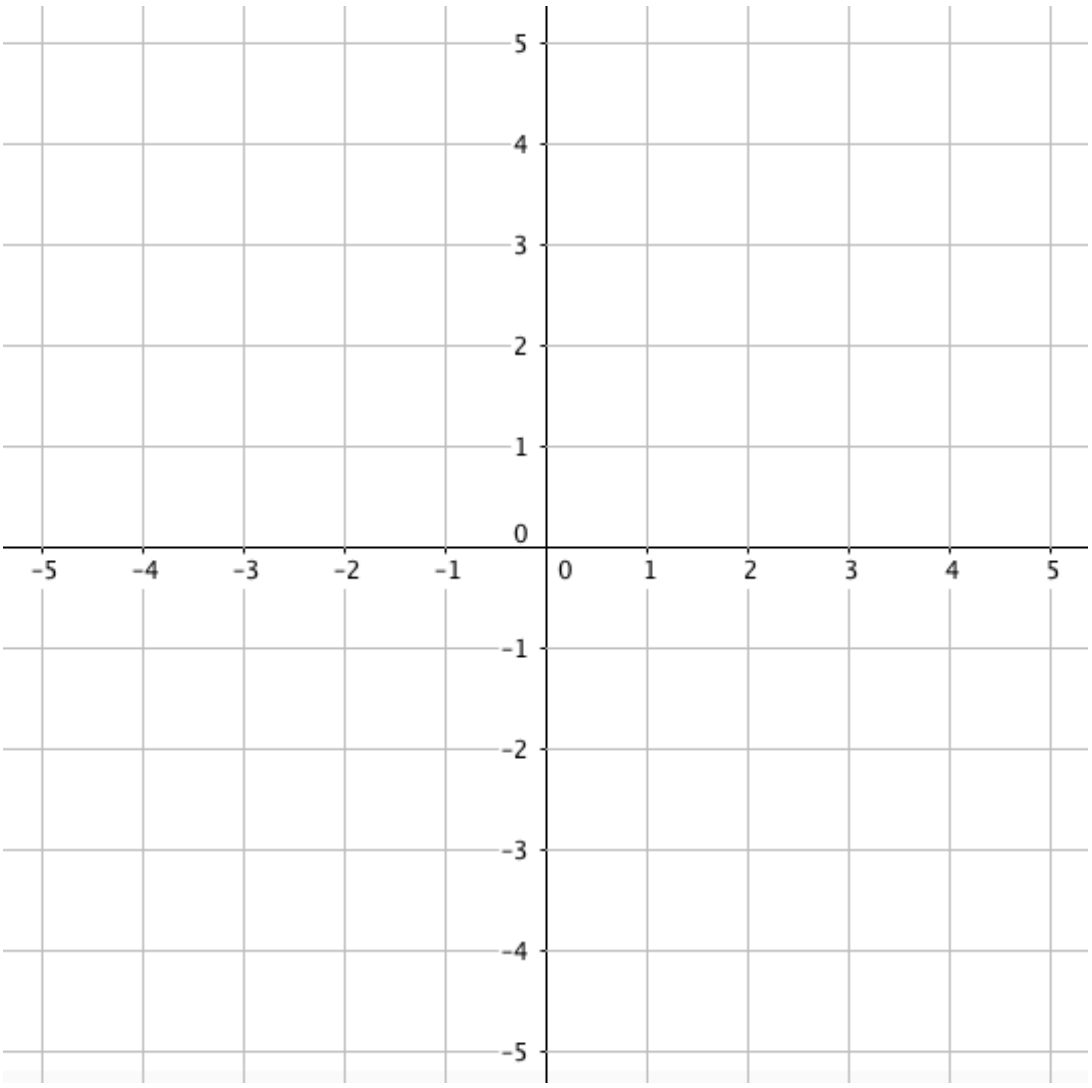
Material 1:

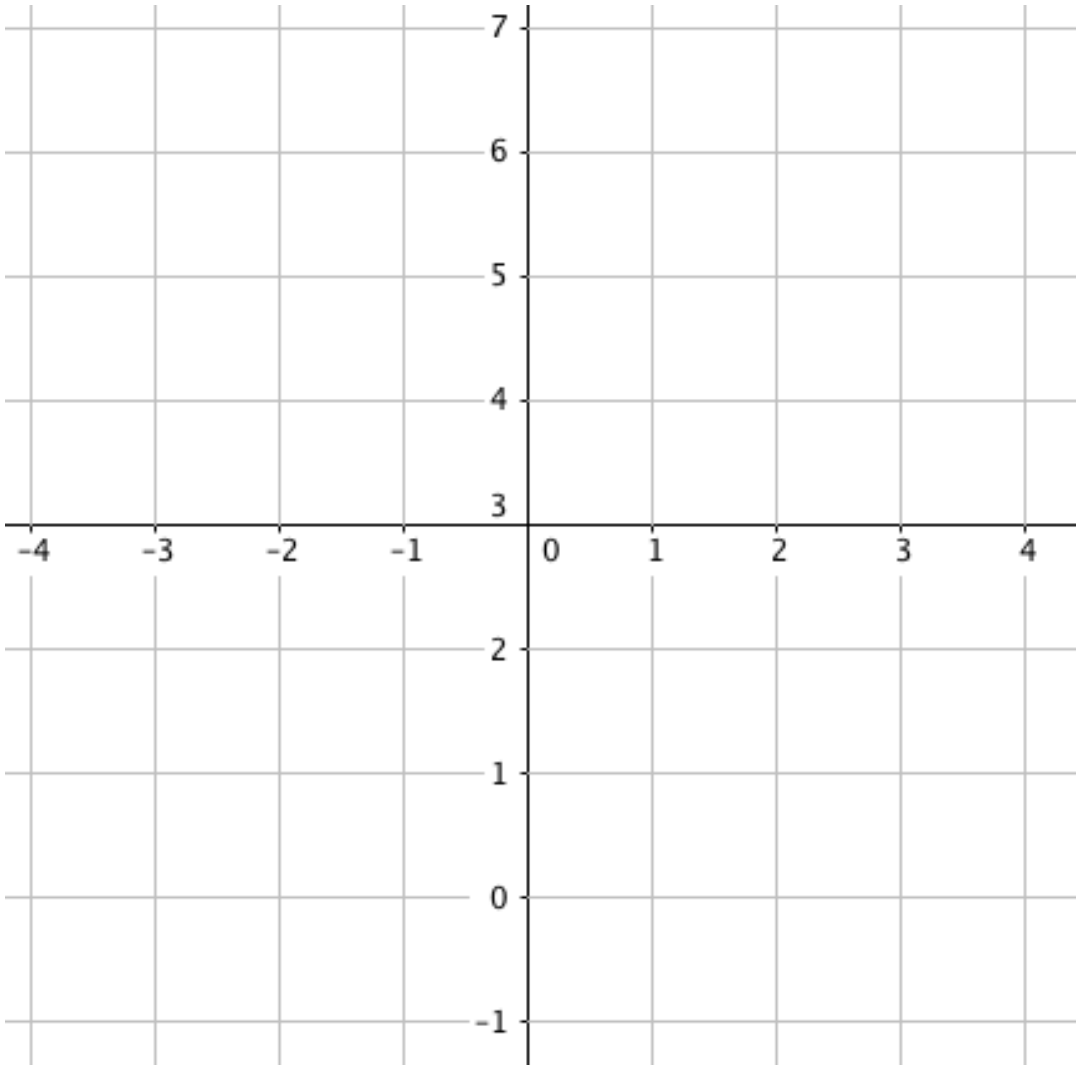
Hinweis: *Wenn ihr weniger als 5 Mitglieder seid, lasst ihr Schwierigkeitsgrad 1, 2... weg*

Schwierigkeitsgrad 1: $f(x) = x + 3$

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	1	2	3	4	5

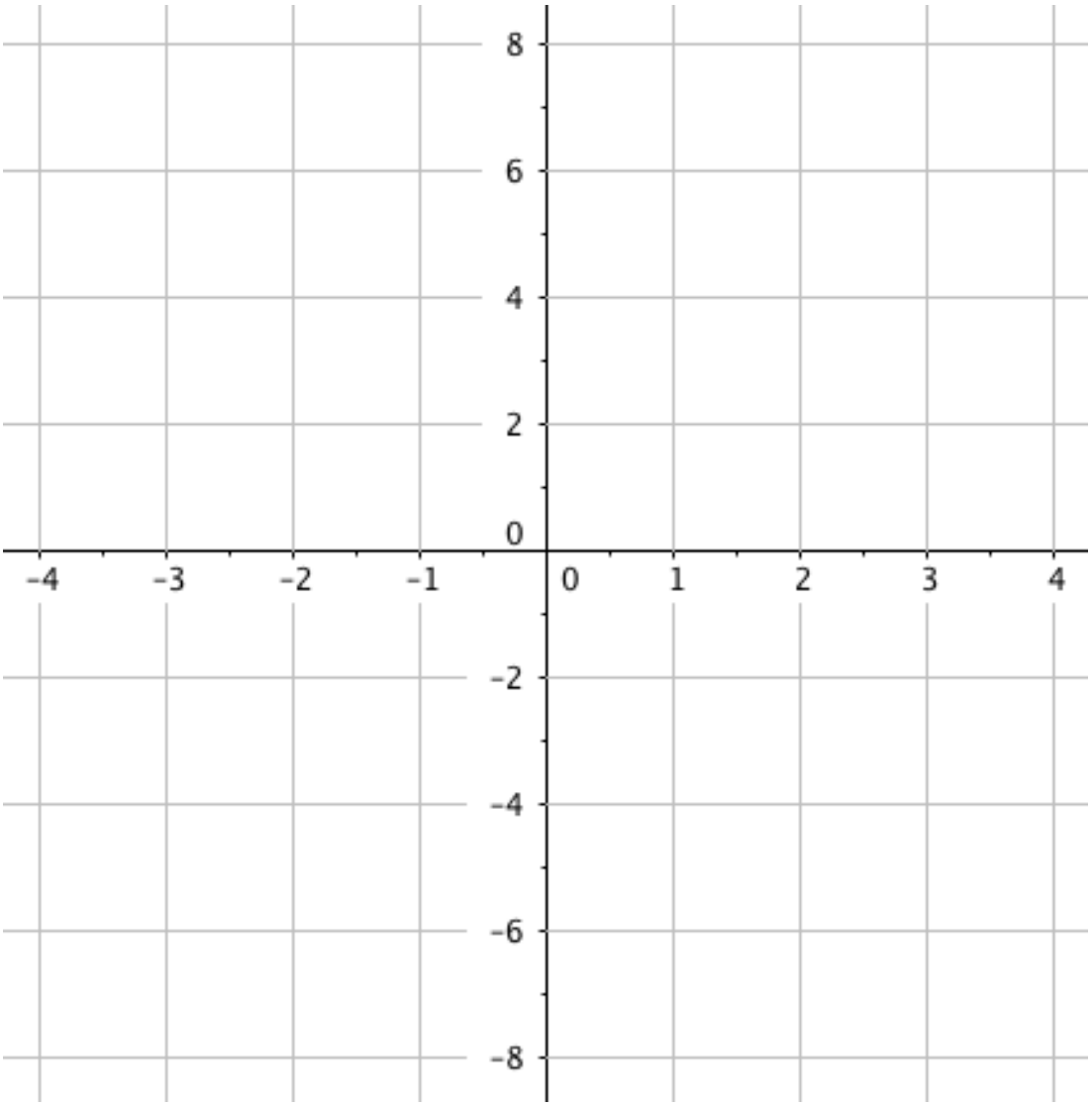
Hinweis*: Du darfst auch selbstständig weitere Werte berechnen, wenn dir dies das Zeichnen erleichtert.*





Das Besondere an diesem Koordinatensystem:

Was verändert sich, was bleibt gleich?



Das Besondere an diesem Koordinatensystem:

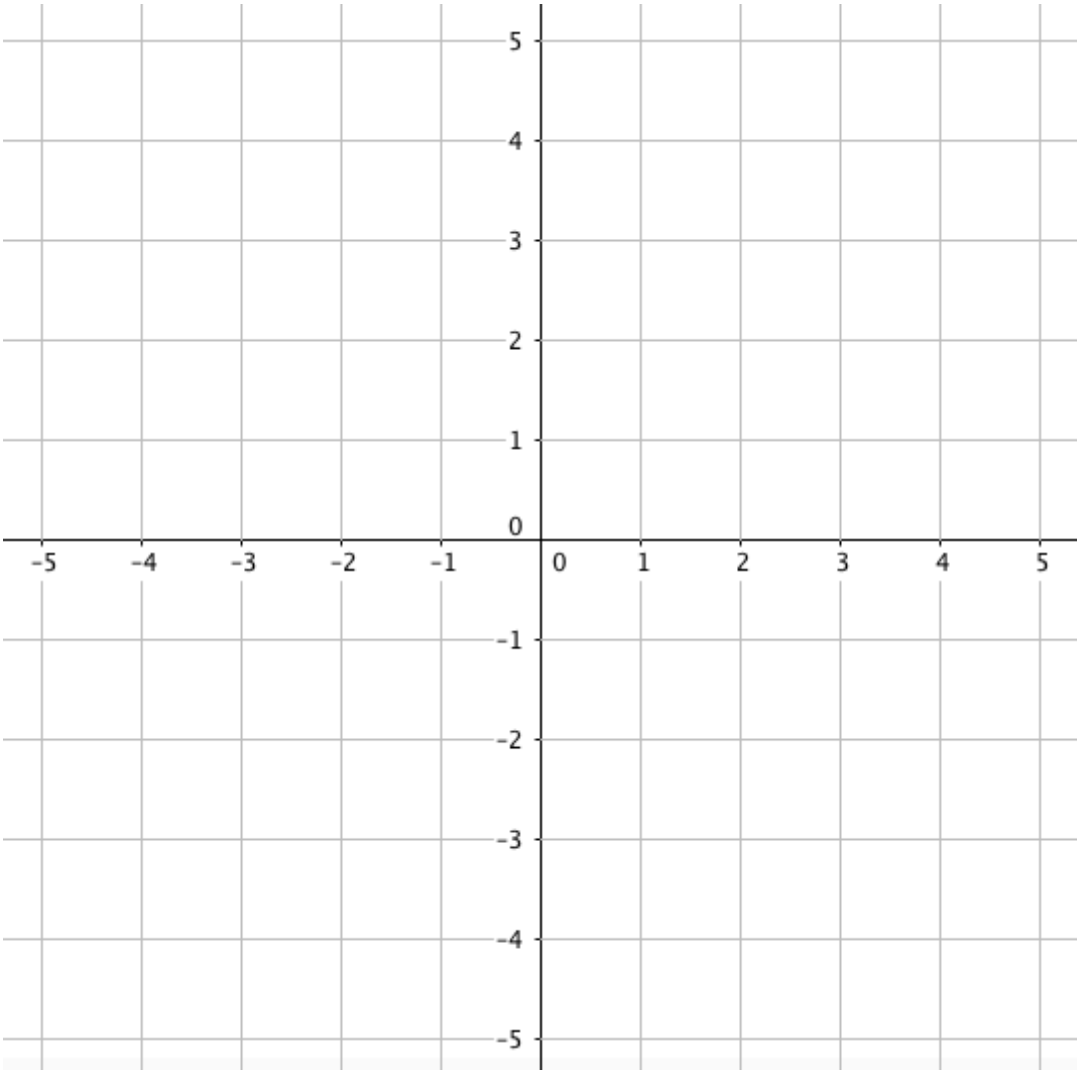
Was verändert sich, was bleibt gleich?

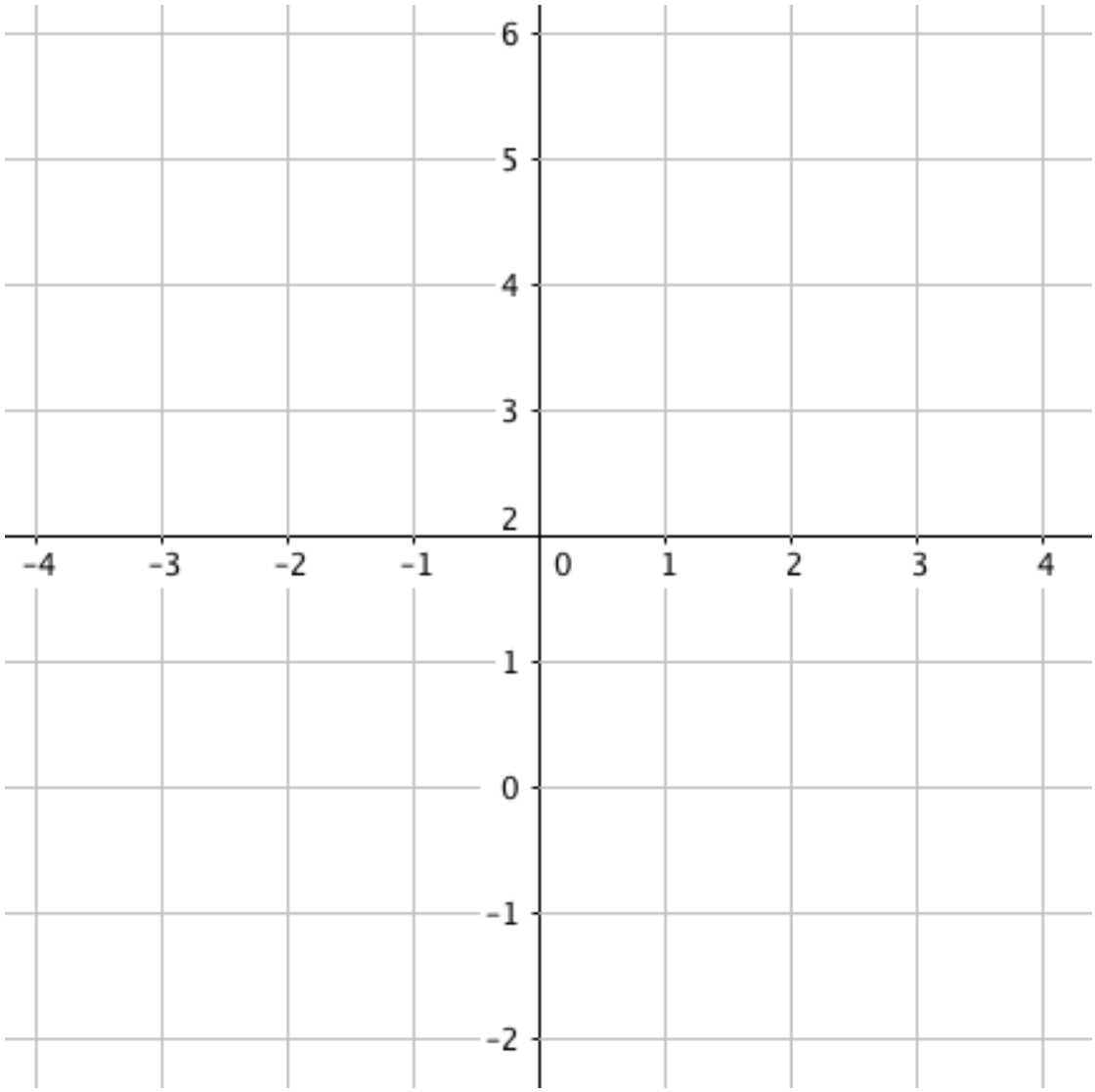
Schwierigkeitsgrad 2: $f(x) = 2x + 2$

x	-2	-1	0	1	2	3
f(x)		0	2	4		

***Hinweis**: Du darfst auch selbstständig weitere Werte berechnen, wenn dir dies das Zeichnen erleichtert.*

→ *ergänze zunächst die fehlenden Werte*





Das Besondere an diesem Koordinatensystem:

_____

_____

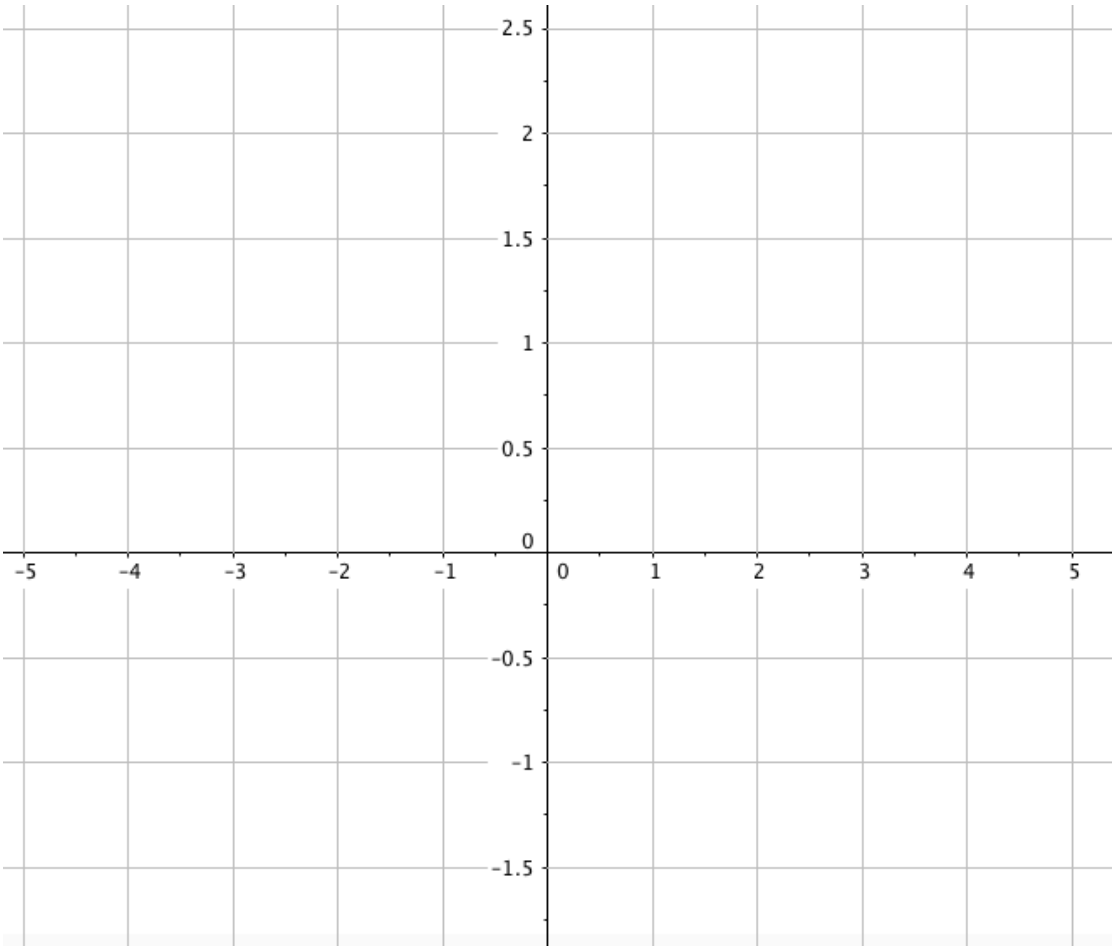
_____

Was verändert sich, was bleibt gleich?

_____

_____

_____



Das Besondere an diesem Koordinatensystem:

_____

_____

_____

Was verändert sich, was bleibt gleich?

_____

_____

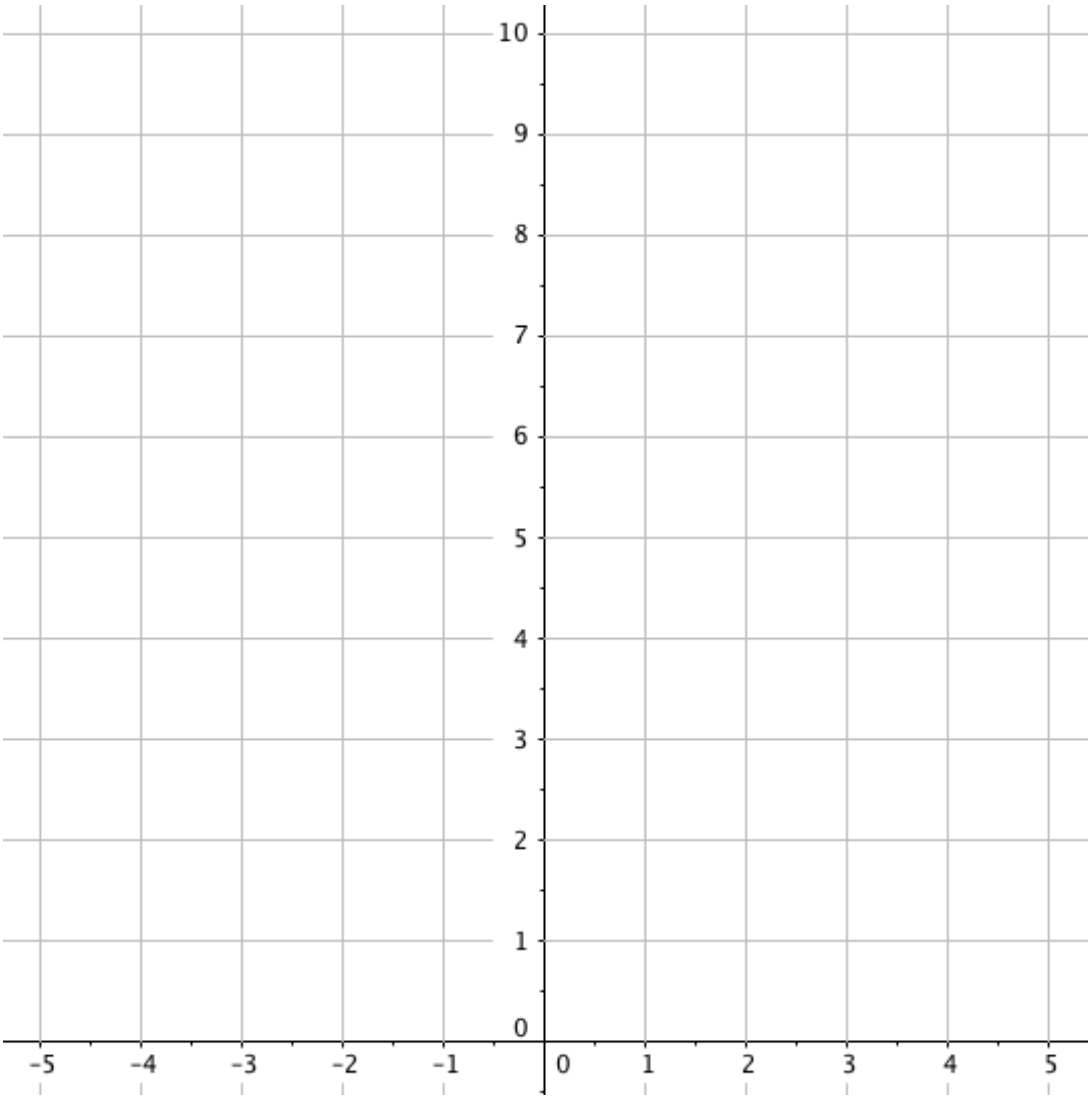
_____

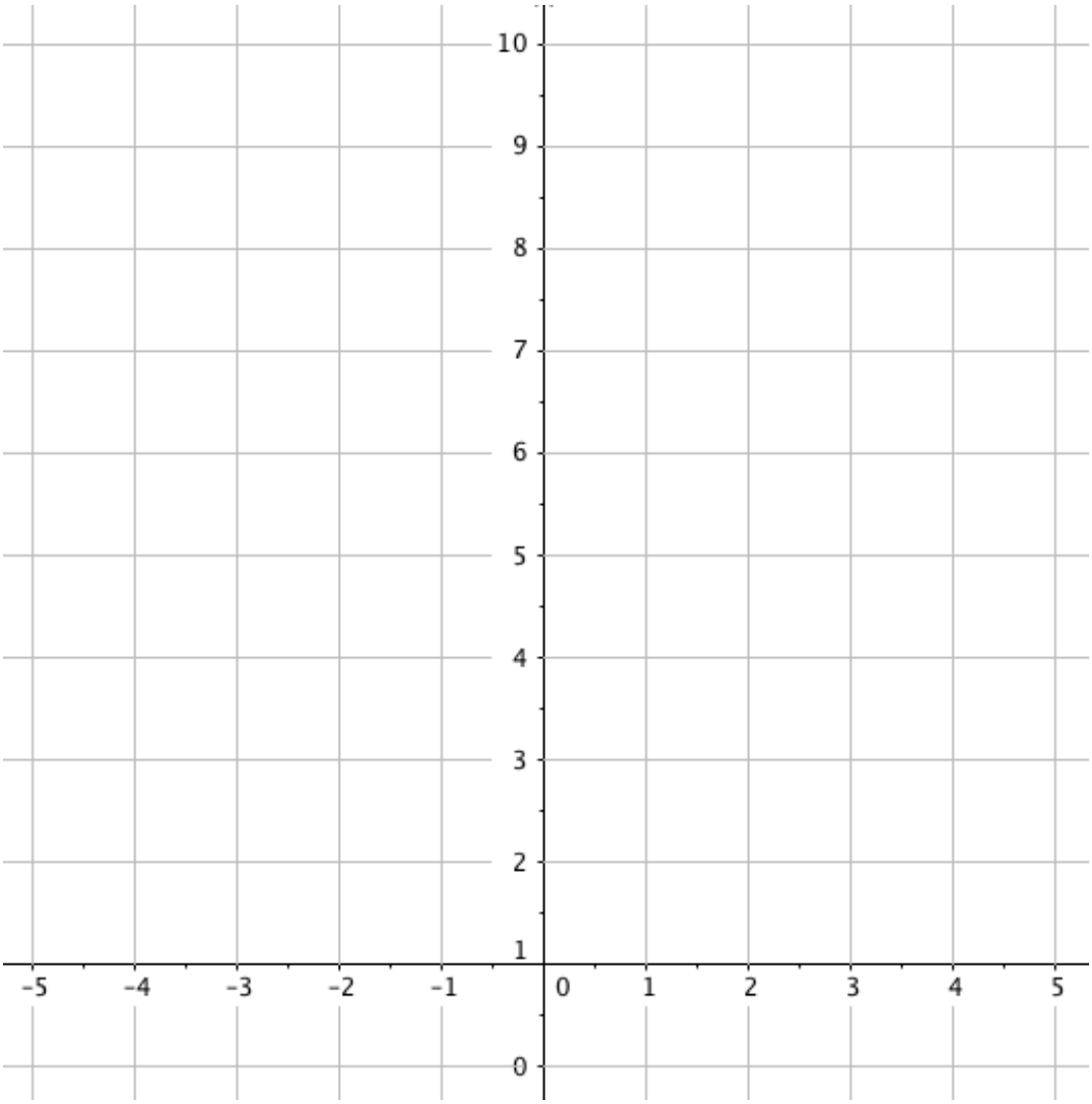
Schwierigkeitsgrad 3: $f(x) = x^2 + 1$

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	5		1		

***Hinweis**: Du darfst auch selbstständig weitere Werte berechnen, wenn dir dies das Zeichnen erleichtert.*

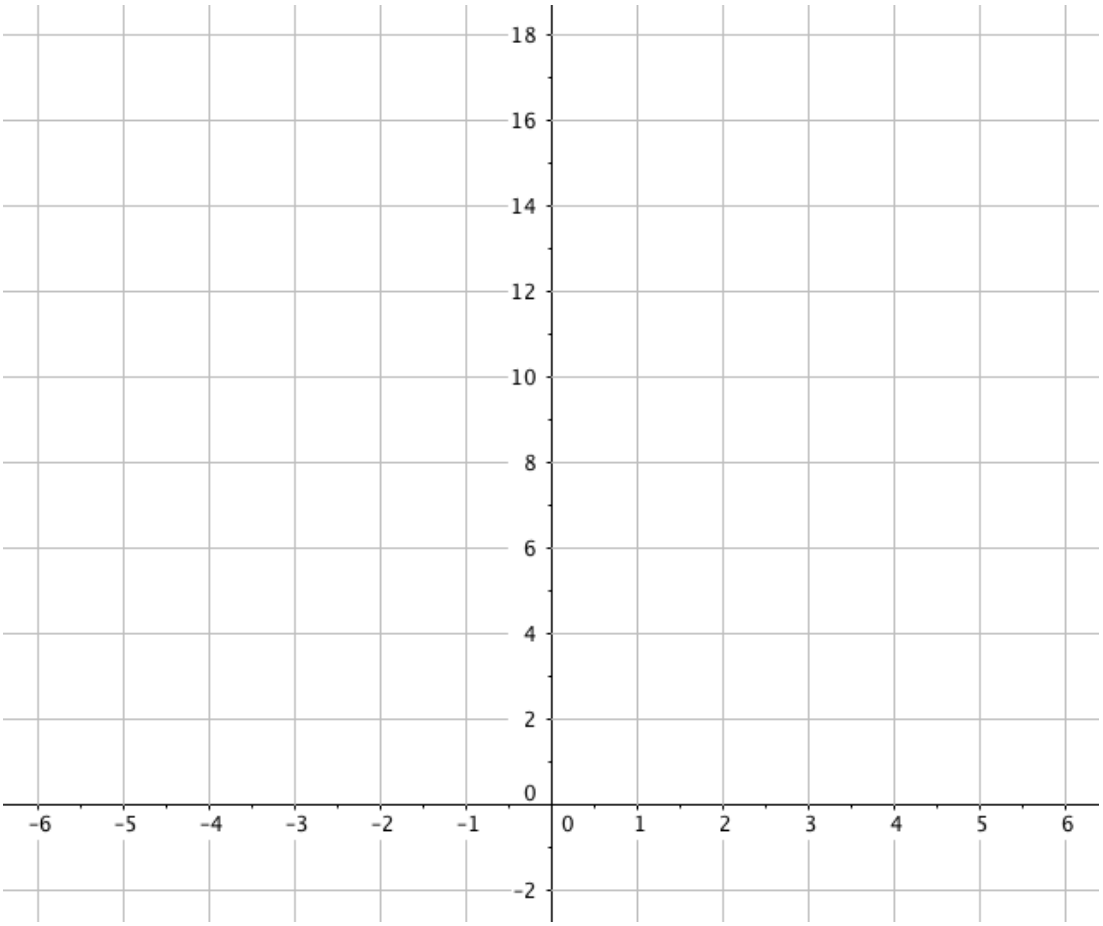
→ *ergänze zunächst die fehlenden Werte*





Das Besondere an diesem Koordinatensystem:

Was verändert sich, was bleibt gleich?



Das Besondere an diesem Koordinatensystem:

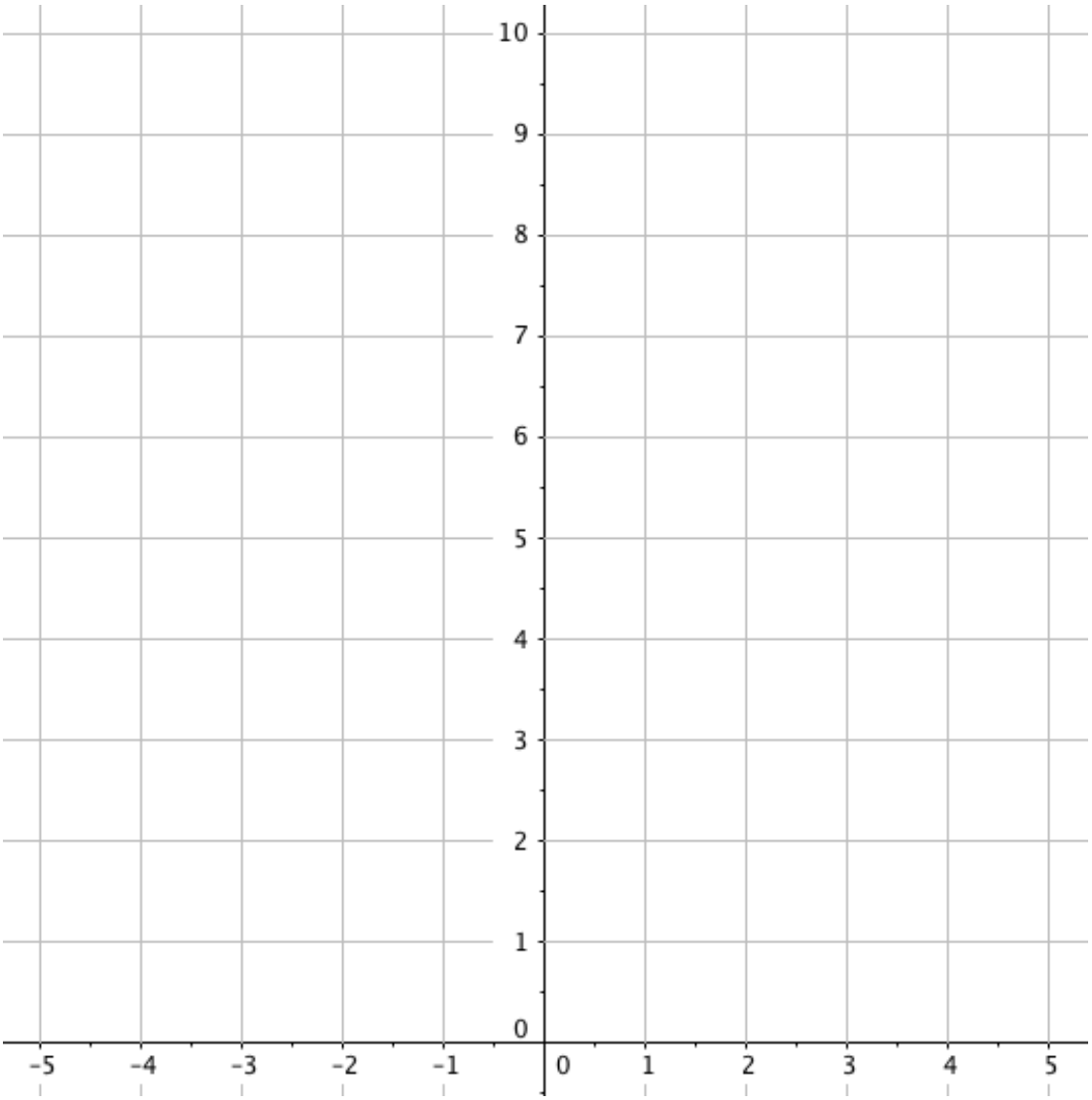
Was verändert sich, was bleibt gleich?

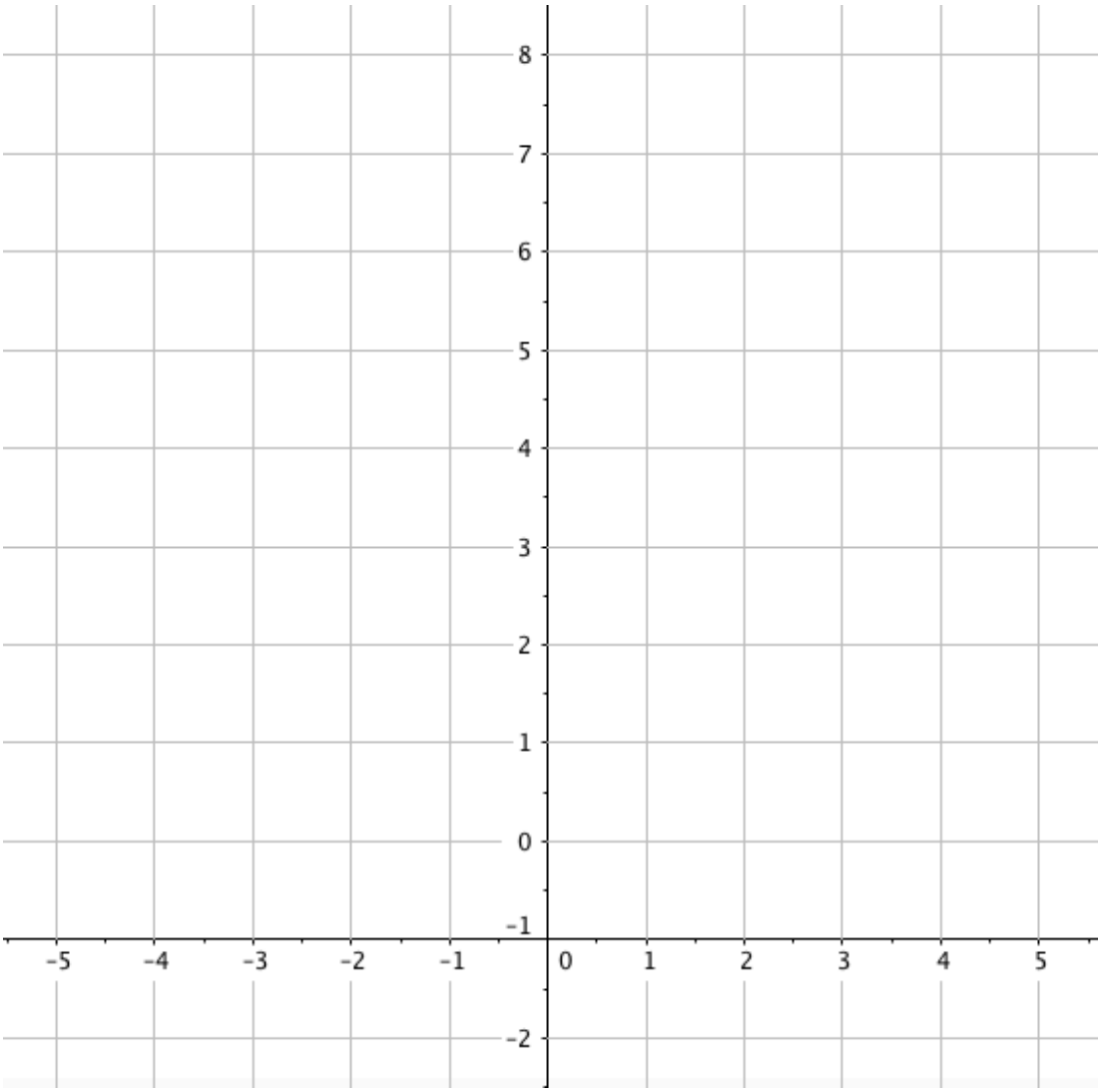
Schwierigkeitsgrad 4: $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{2}x^2}$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)				0	0,5		

***Hinweis**: Du darfst auch selbstständig weitere Werte berechnen, wenn dir dies das Zeichnen erleichtert.*

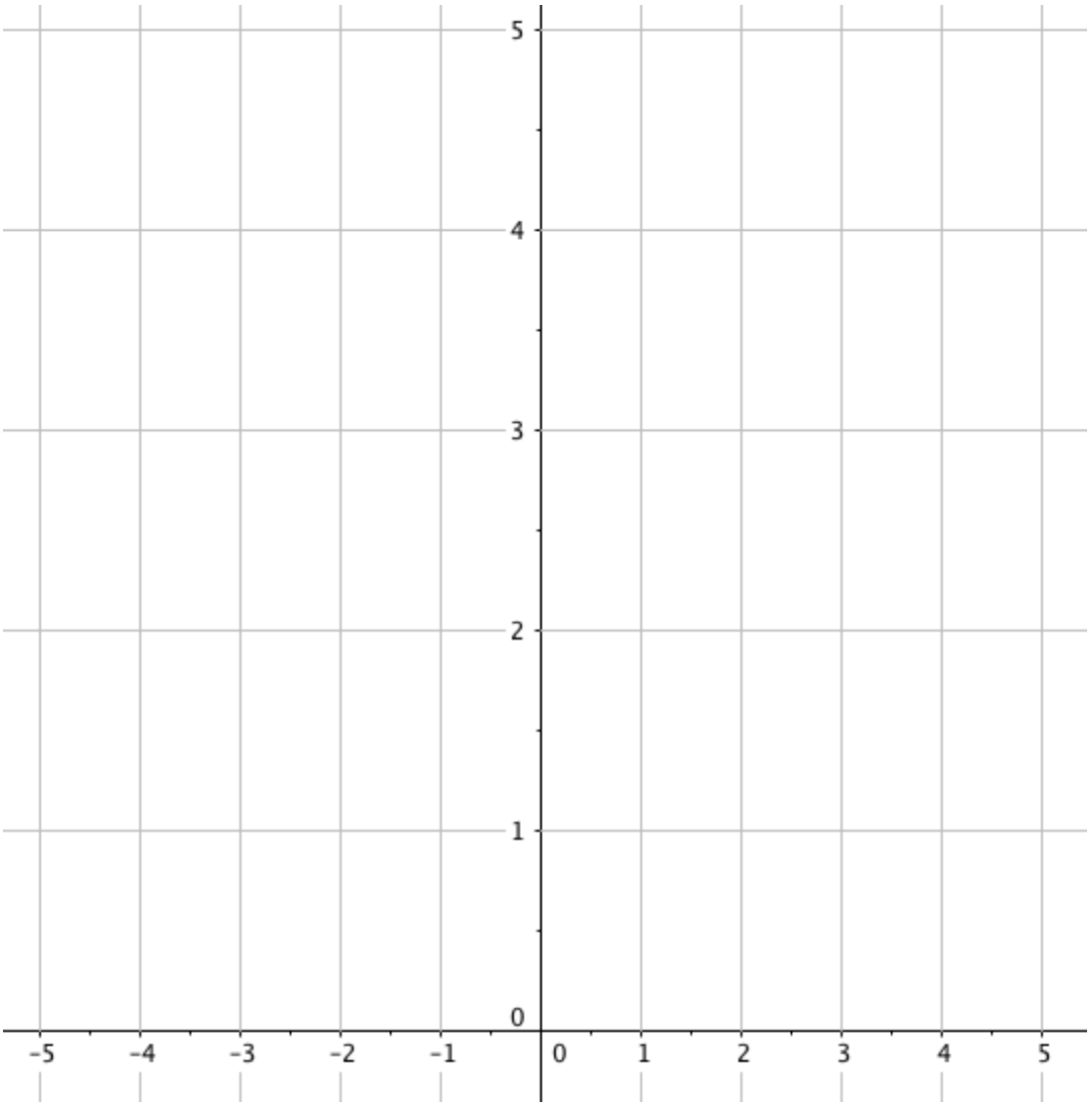
→ *ergänze zunächst die fehlenden Werte*





Das Besondere an diesem Koordinatensystem:

Was verändert sich, was bleibt gleich?



Das Besondere an diesem Koordinatensystem:

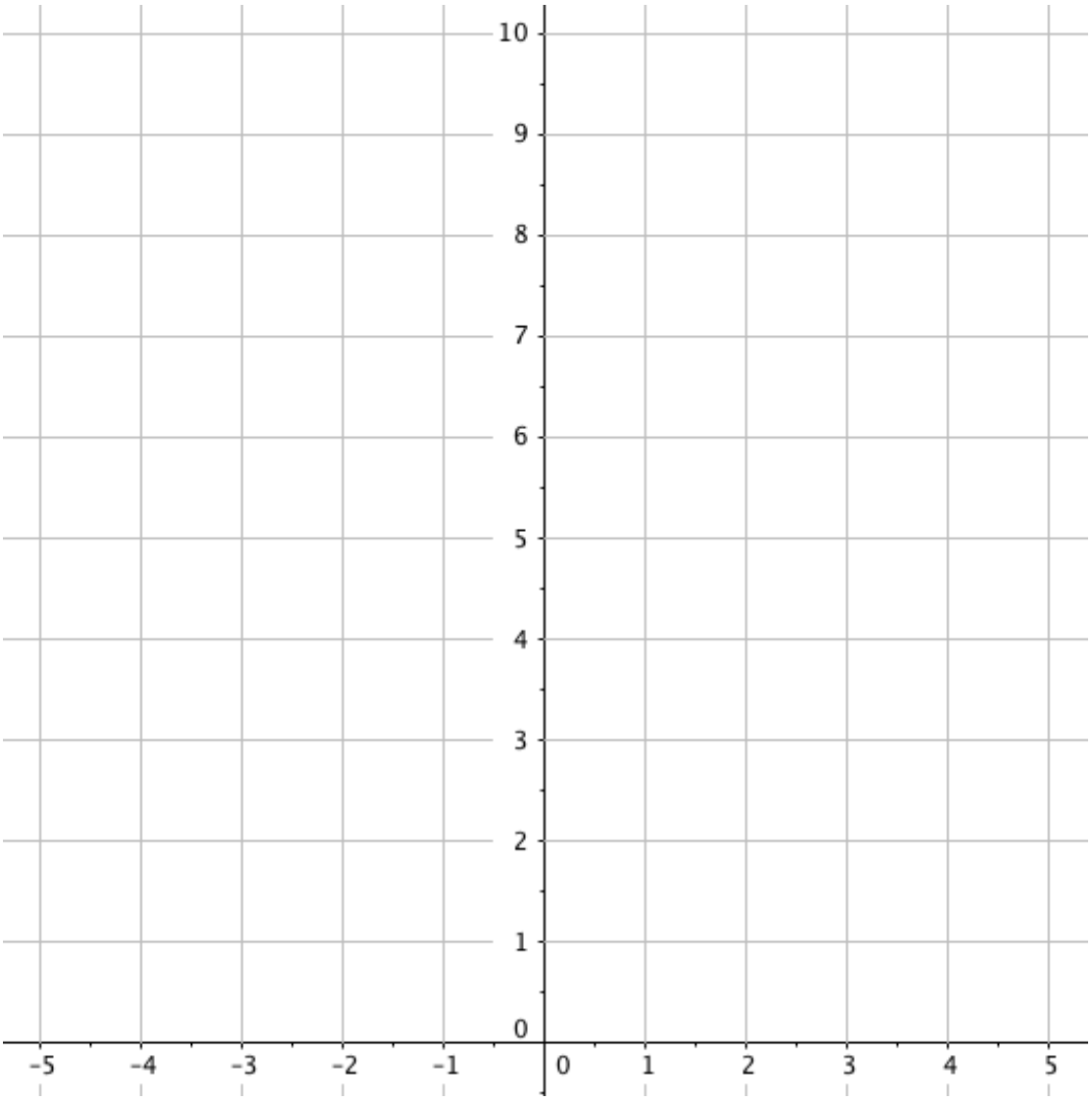
Was verändert sich, was bleibt gleich?

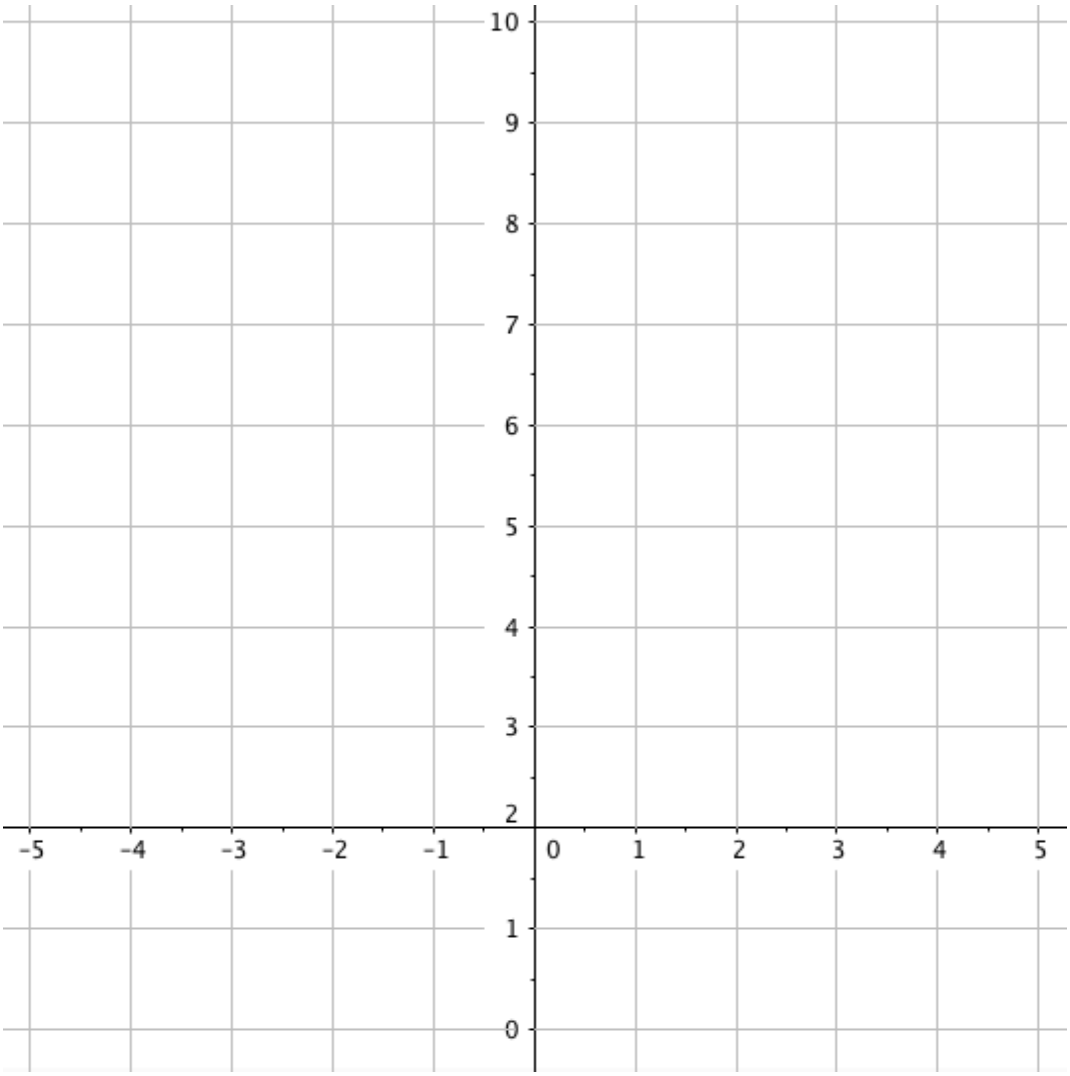
Schwierigkeitsgrad 5: $f(x) = 2x^2 + 2$

x	-2	-1	0	1	2
f(x)			2	4	

***Hinweis**: Du darfst auch selbstständig weitere Werte berechnen, wenn dir dies das Zeichnen erleichtert.*

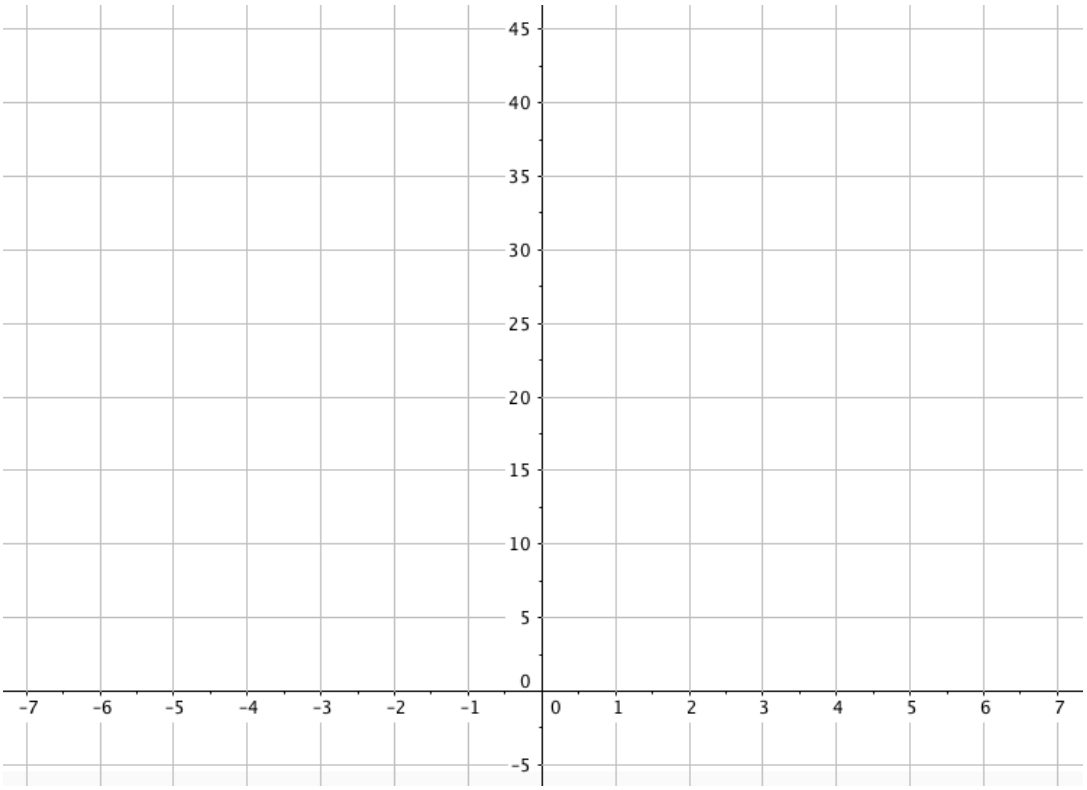
→ *ergänze zunächst die fehlenden Werte*





Das Besondere an diesem Koordinatensystem:

Was verändert sich, was bleibt gleich?



Das Besondere an diesem Koordinatensystem:

_____

_____

_____

Was verändert sich, was bleibt gleich?

_____

_____

_____

2.4 Station 2

Station 2:
GTR Experimente

Aufgaben:

1) **- Einzelarbeit:** Bearbeitet Material 1.
   - Gruppenarbeit: Besprecht in eurer Gruppe das zuvor gelernte Vorgehen und klärt Fragen. Macht erst mit Aufgabe 2 weiter, wenn Material 1 verstanden ist.
   - Einzelarbeit: Durch Veränderung von Xmin/max und Ymin/max kann man das Aussehen des Graphen verändern, macht hierzu weitere Experimente und füllt die Tabelle aus (Material 2)

Hinweis: *Stellt das V-Window wieder auf „STANDRD" (vgl. Material 1) und löscht die vorherige Funktion, bevor ihr mit Aufgabe 2 beginnt*

2) **Einzelarbeit:** Entscheidet euch je für eine der Funktionen (Material 3), macht die Experimente und füllt die Tabelle aus. Stellt euch eure Ergebnisse gegenseitig vor und klärt Fragen. Zeigt auch die entsprechenden Graphen auf dem GTR.

3) Füllt gemeinsam folgende Merksätze aus:

→ Sind die Werte Xmin und Xmax größer als die von Ymin und Ymax, größer, so wirkt die Steigung eines linearen Graphen _____.
→ Sind die Werte Xmin und Xmax kleiner als die von Ymin und Ymax, größer, so wirkt die Steigung eines linearen Graphen _____.
→ Sind die Werte Xmin und Xmax größer als die von Ymin und Ymax, größer, so wirkt ein quadratischer Graph _____.
→ Sind die Werte Xmin und Xmax kleiner als die von Ymin und Ymax, größer, so wirkt ein quadratischer Graph _____.
→durch die Veränderung der Werte ändert sich die _____der Achsen.

Für Schnelle:

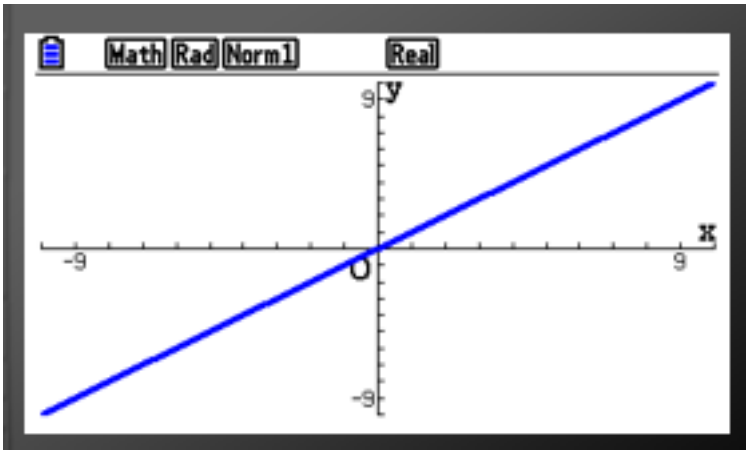
Denkt euch eigene Aufgaben mit neuen Funktionen aus

Material 1:
Anleitung zum Ändern der Skalierung der Koordinatenachsen:

Vorbereitung:

- Gehe im Menü des GTR auf „Graph“
- Lösche alle zuvor eingegebenen Funktionen (F2: „DELETE“)
- Gib ganz oben die Funktion **f(x)=x** ein und drücke „DRAW“
- Drücke „V-Window“ (F3)
- Drücke noch einmal F3 („STANDRD“) und EXE und dann wieder „DRAW“ (F6)

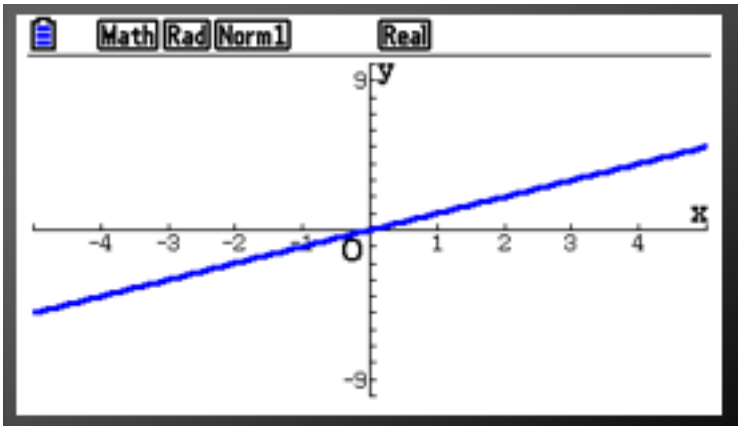
Dein Fenster müsste jetzt folgendermaßen aussehen:



Änderung der Skalierung

1) Drücke F3 („V-Window“) und ändere die folgenden Werte:

Xmin: -5
max: 5
Alle anderen Werte änderst du nicht.
Anschließend sollte dein Fenster so aussehen:



Material 2:

Xmin	max	Ymin	max	das hat sich verändert:	Grobe Skizze

Was genau ist der Grund für das veränderte Aussehen der Graphen?

_____

_____

_____

Material 3:

Hinweis: *Wenn ihr weniger als 5 Mitglieder seid, lasst ihr Funktion 1, 2... weg*

Funktion 1:

$$f(x) = 3x$$

Anweisung	Xmin	max	Ymin	max
f(x) soll viel flacher aussehen				
f(x) soll viel steiler aussehen				
f(x) soll ungefähr aussehen wie f(x)=x				

Funktion 2

$$f(x) = \frac{1}{2}x$$

Anweisung	Xmin	max	Ymin	max
f(x) soll viel flacher aussehen				
f(x) soll viel steiler aussehen				
f(x) soll ungefähr aussehen wie f(x)=x im normalen Koordinatensystem				

Funktion 3:

$$f(x) = 3x^2$$

Anweisung	Xmin	max	Ymin	max
f(x) soll gestreckter aussehen				
f(x) soll gestauchter aussehen				
f(x) soll ungefähr aussehen wie f(x)=x^2 im normalen Koordinatensystem				

Funktion 4

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2$$

Anweisung	Xmin	max	Ymin	max
f(x) soll flacher aussehen				
f(x) soll steiler aussehen				
f(x) soll ungefähr aussehen wie f(x)=x im normalen Koordinatensystem				

Funktion 5:

$$f(x) = 3x + 2$$

Anweisung	Xmin	max	Ymin	max
f(x) soll gestreckter aussehen				
f(x) soll gestauchter aussehen				
f(x) soll ungefähr aussehen wie $f(x)=x^2$ im normalen Koordinatensystem				

☺ Hilfekarte zu Material 2 und 3 ☺:

Ist dein Koordinatenkreuz nicht mehr in der Mitte des Fensters?
Verändere die Werte von Xmin, Xmax, Ymin, Ymax so, dass....

... Xmin und Ymin immer negativ sind

...bei Xmin und Xmax sowie Ymin und Ymax jeweils der gleiche Wert steht

Kannst du dir die Veränderungen nicht erklären?
Fang langsam an, verändere zunächst nur Xmin und Xmax oder nur Ymin und Ymax und schau, was passiert. (Die anderen Werte bleiben erst einmal in der Standradeinstellung)

2.4 Station 3

Station 3:
Funktionenmemory

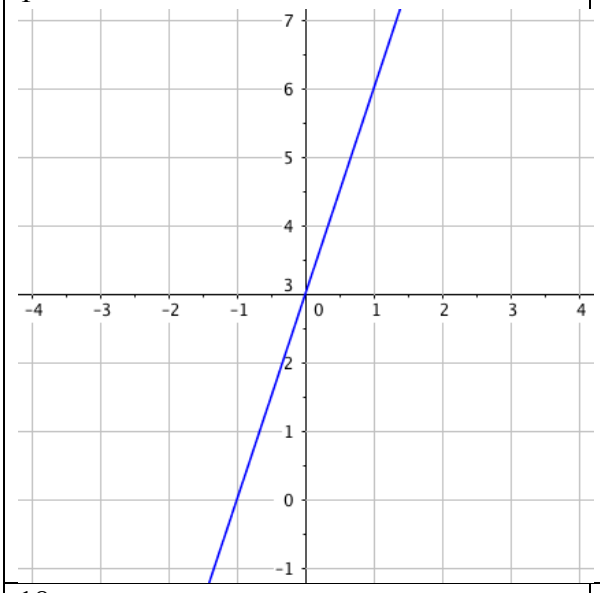
Aufgaben:

1) **Gruppenarbeit:** Memory: Legt die Karten verdeckt vor euch auf den Tisch und versucht, Paare zu finden. Jede Funktion hat genau einen Partner. Wenn ihr glaubt ein Paar gefunden zu haben überprüft dies ohne und mit GTR. Hilft der GTR euch hier überhaupt weiter?

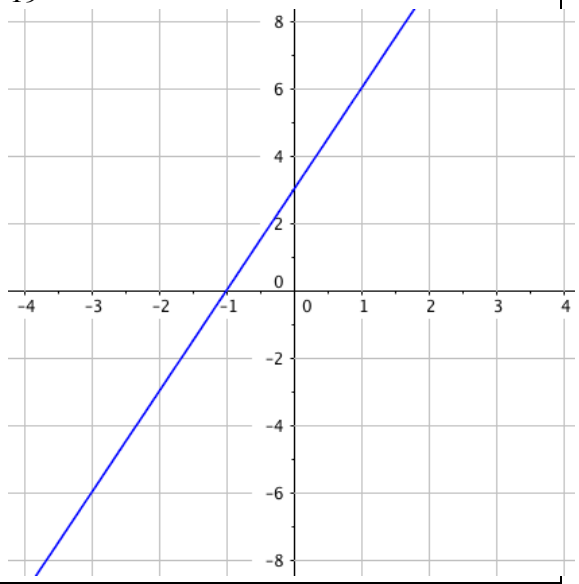
Hinweis: *Wenn ihr glaubt fertig zu sein, könnt ihr euch die Lösung abholen und vergleichen*

Für Schnelle:
Sucht euch eine der Funktionen aus, zeichnet sie in das „normale“ Koordinatensystem und ein Weiteres verändertes.

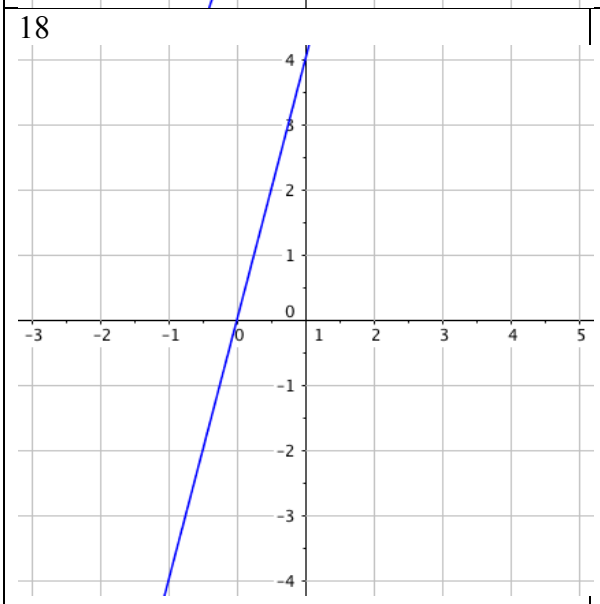
1



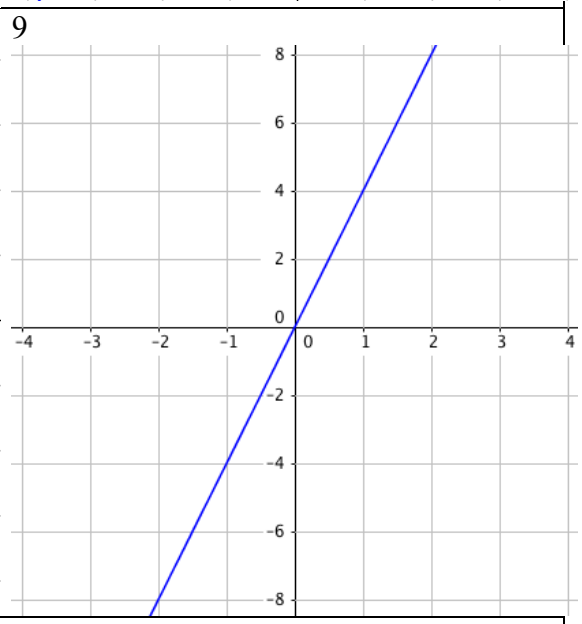
19



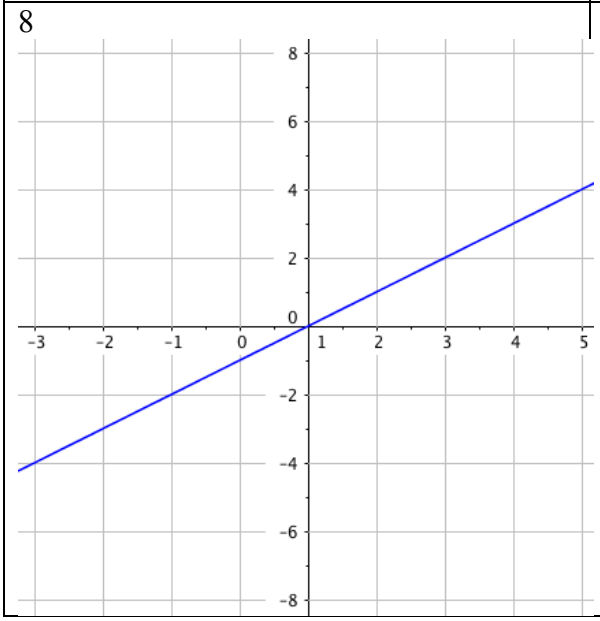
18



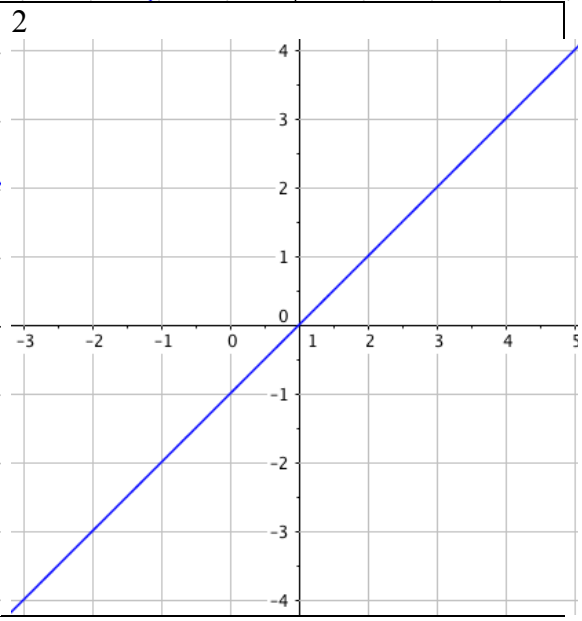
9



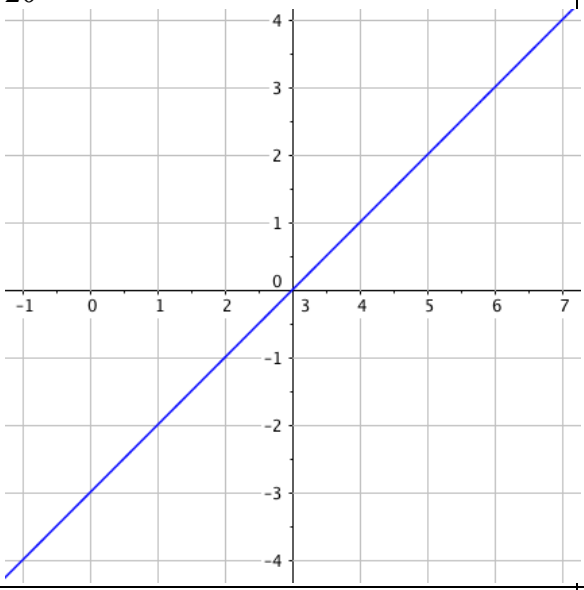
8



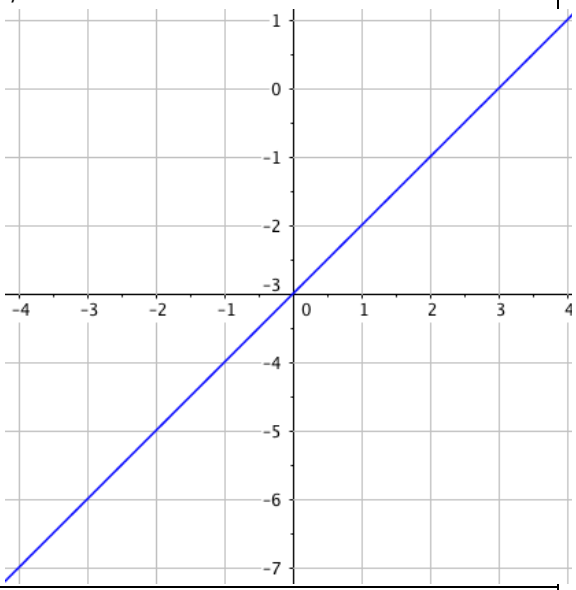
2



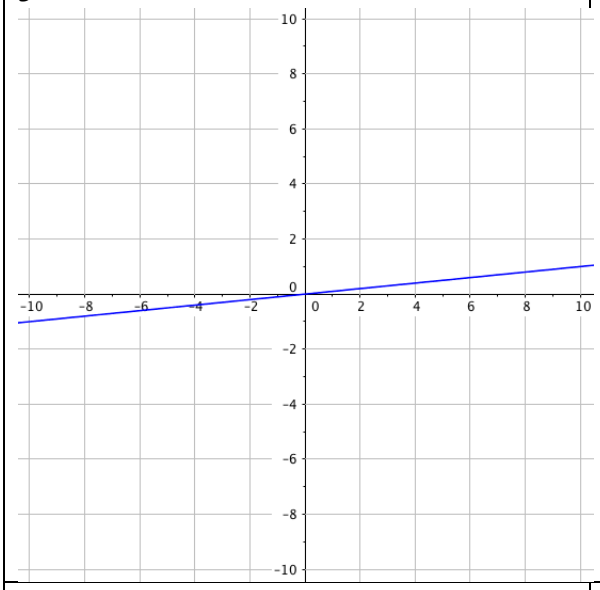
20


4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-1
0
1
2
3
4
5
6
7

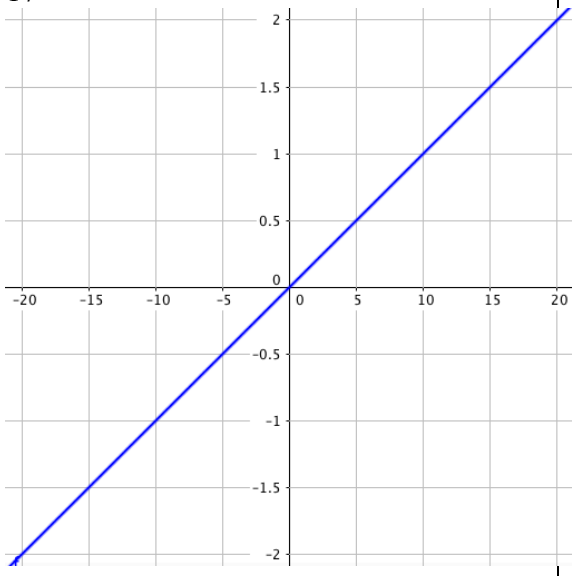
7


1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4

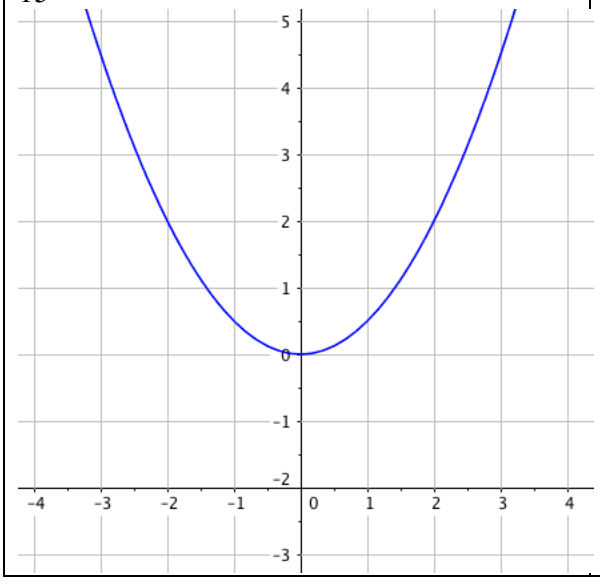
3


10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10

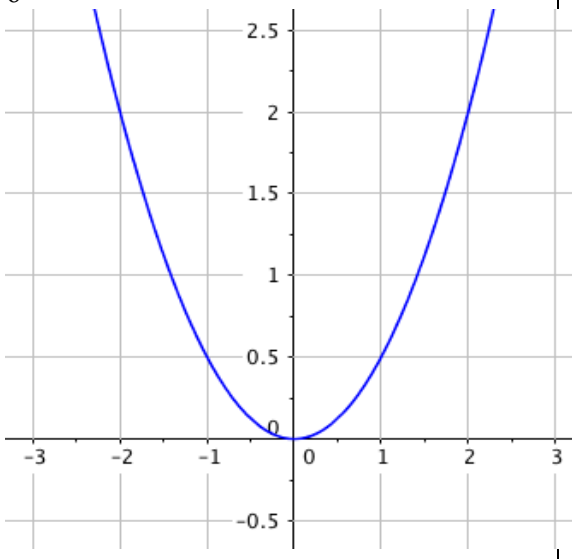
17


2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-20
-15
-10
-5
0
5
10
15
20

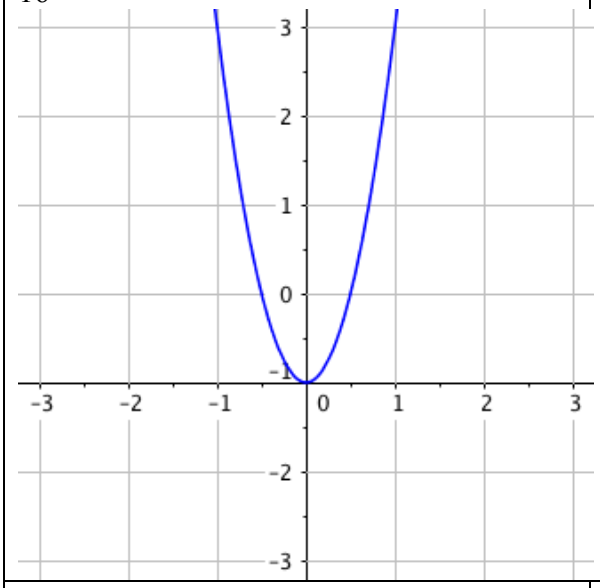
15


5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4

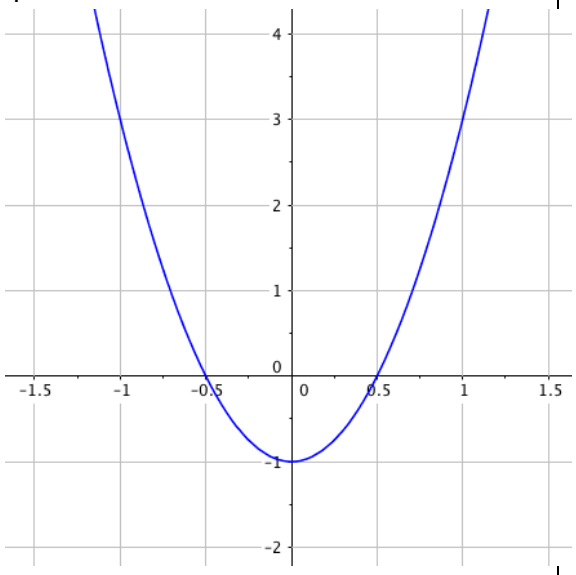
6


2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-3
-2
-1
0
1
2
3

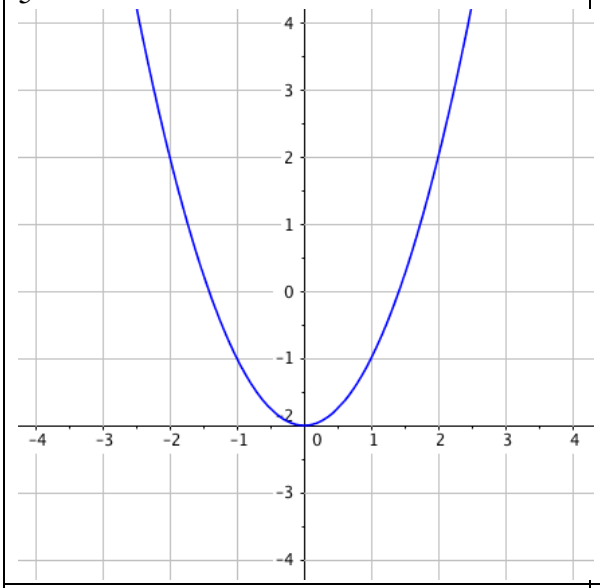
16


3
2
1
0
-1
-2
-3
-3
-2
-1
0
1
2
3

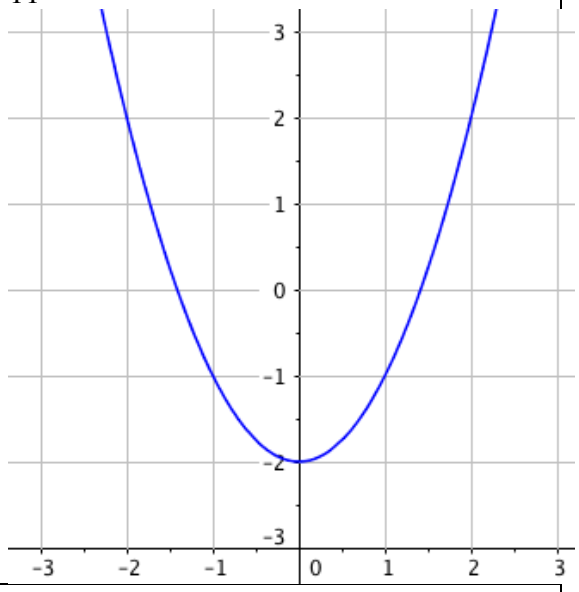
4


4
3
2
1
0
-1
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5

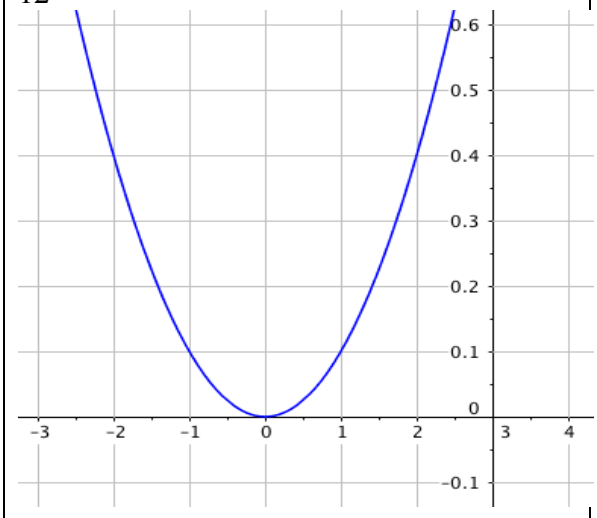
5


4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4

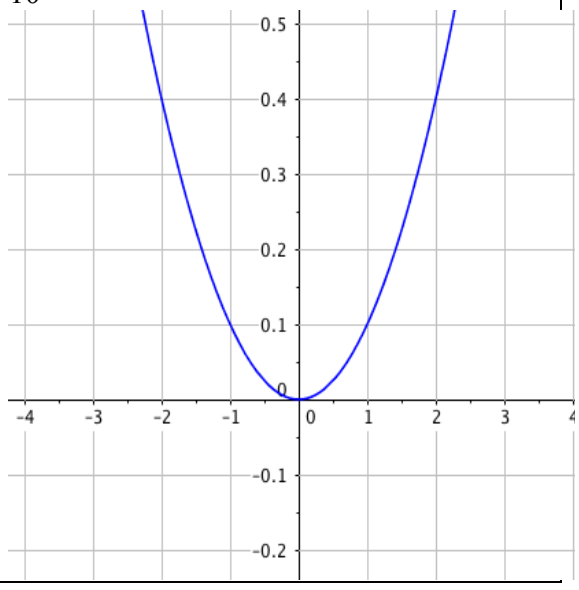
11


3
2
1
0
-1
-2
-3
-3
-2
-1
0
1
2
3

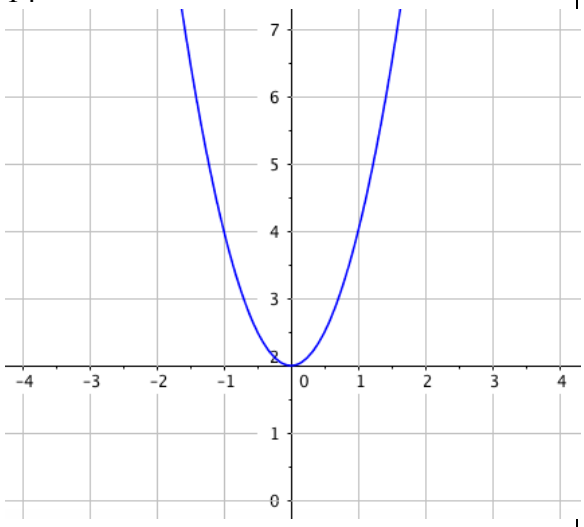
12


0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
-3
-2
-1
0
1
2
3
4

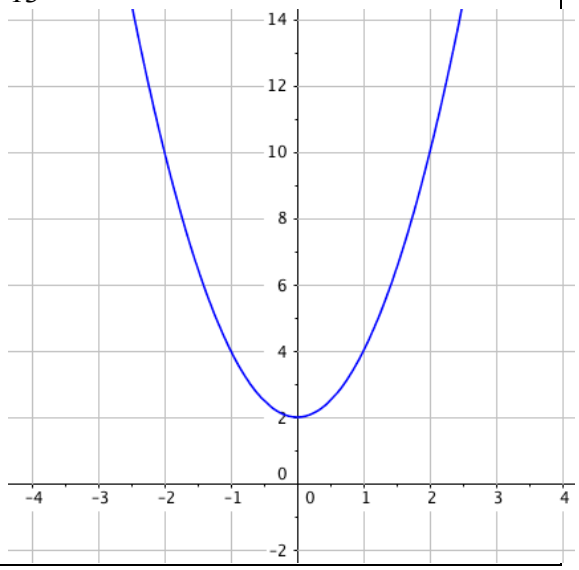
10


0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3

14



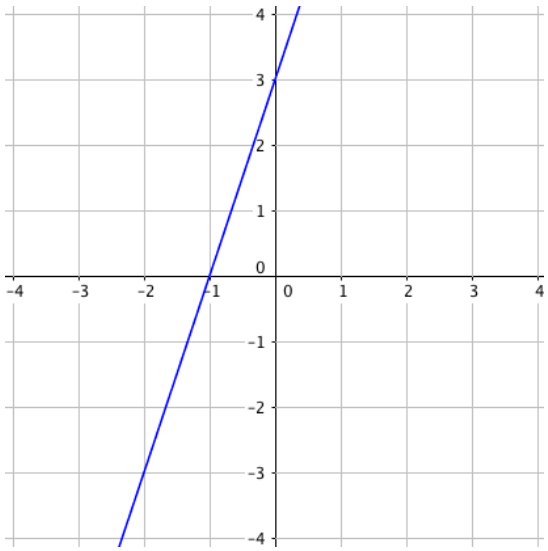
13



21

$3x + 3$

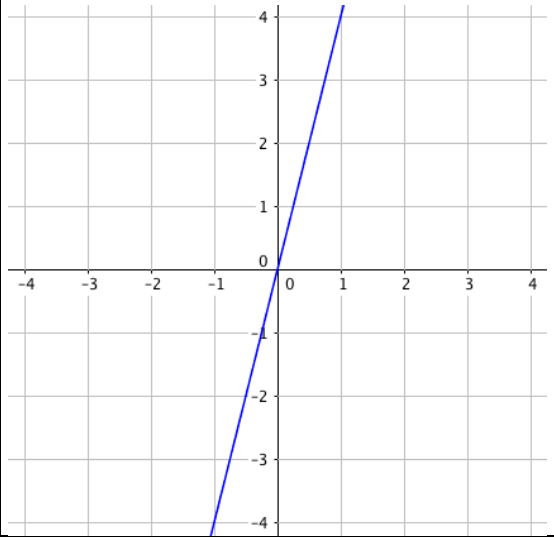
30

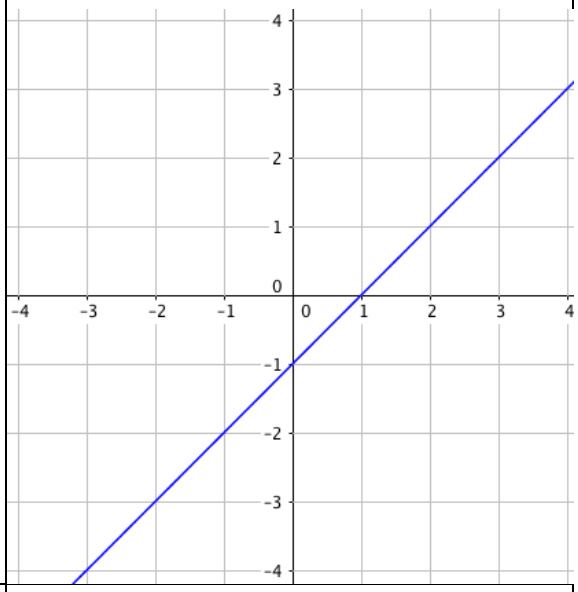
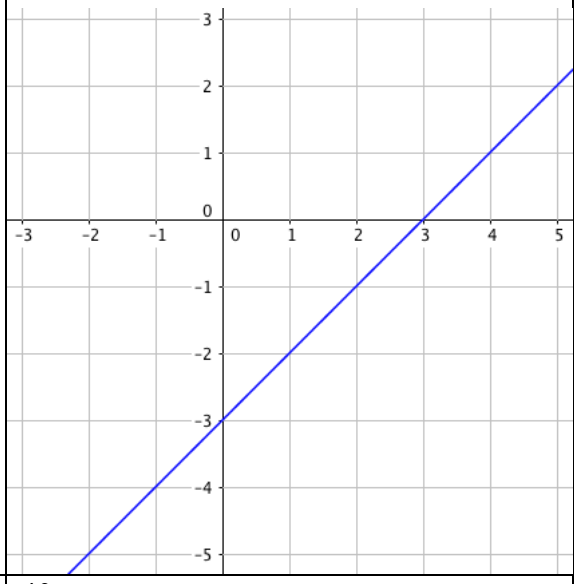
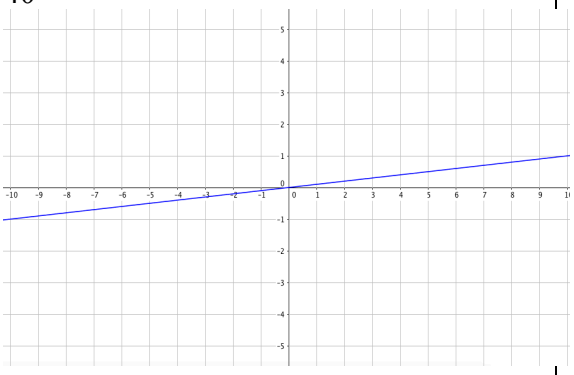


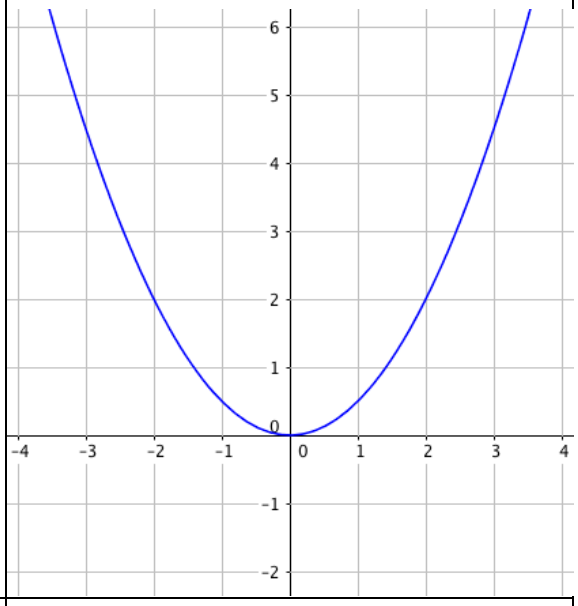
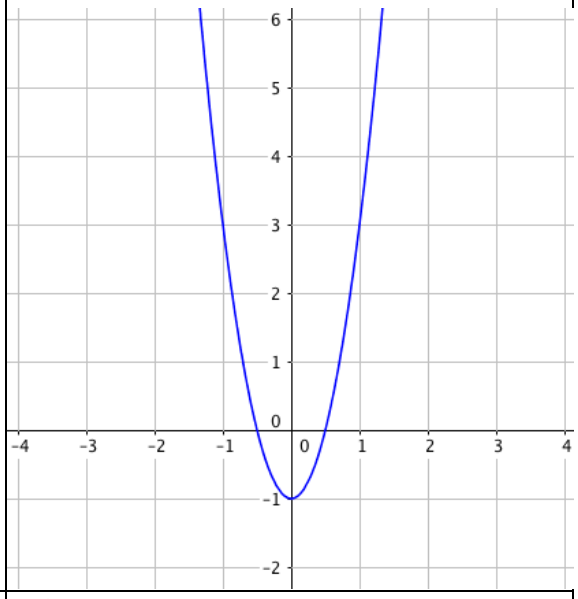
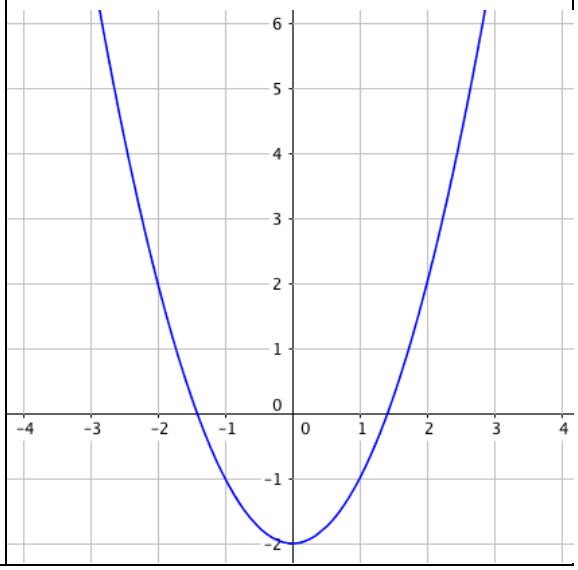
31

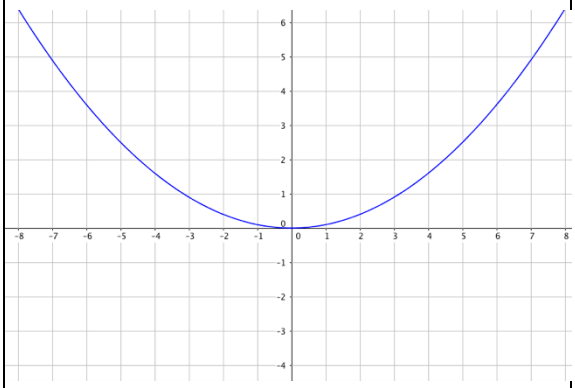
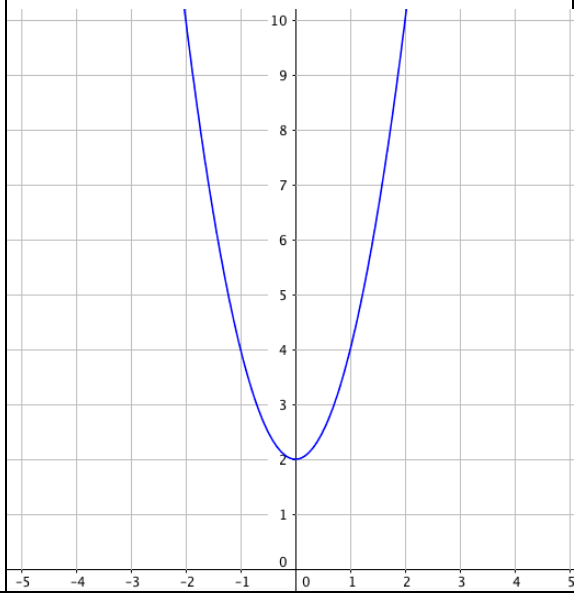
$4x$

26



25 $x-1$	32 
34 $x-3$	22 
27 $\frac{1}{10}x$	40 

33 $\frac{1}{2}x^2$	28 
23 $4x^2 - 1$	39 
35 $x^2 - 2$	24 

38 $\frac{1}{10}x^2$	37 
29 $2x^2 + 2$	36 

Lösung:

1	19	21	30
18	9	31	26
8	2	25	32
20	7	34	22
3	17	27	40
15	6	33	28
16	4	23	39
5	11	35	24
12	10	38	37
14	13	29	36

☺ Hilfekarte zum Memory ☺

Von jetzt an dürft ihr, wenn eure beiden Karten kein Paar sind, eine von beiden offen liegen lassen.
So müsst ihr nicht mehr so viele Karten suchen.

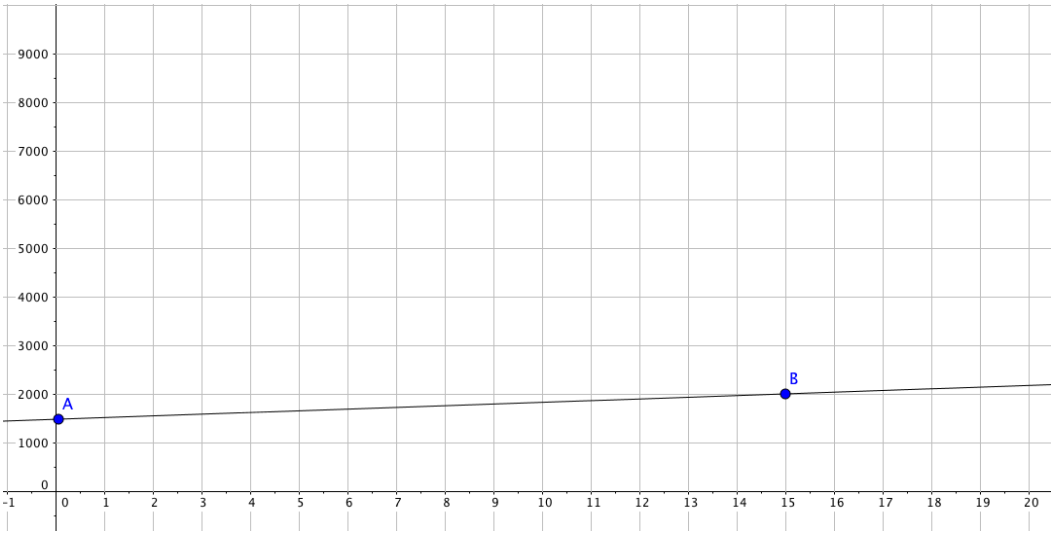
2.5 Station 4

Station 4:
Anbieter

Aufgaben:

1) - **Einzelarbeit:** Frau Urbanczyk hat Geld geerbt und will es nun möglichst gewinnbringend anlegen. Einer der Anbieter hat nun einen Termin mit ihr und möchte sein Angebot natürlich möglichst attraktiv und gewinnbringend aussehen lassen. Versetzt euch gemeinsam in die Lage des Anbieters und überlegt, wie ihr das Angebot für Frau Urbanczyk auf den ersten Blick attraktiver gestalten könntet.
   - **Gruppenarbeit:** Stellt euch die Ergebnisse vor und überprüft sie auf Richtigkeit

Die untere Abbildung zeigt den Gewinnzuwachs im Laufe der Jahre



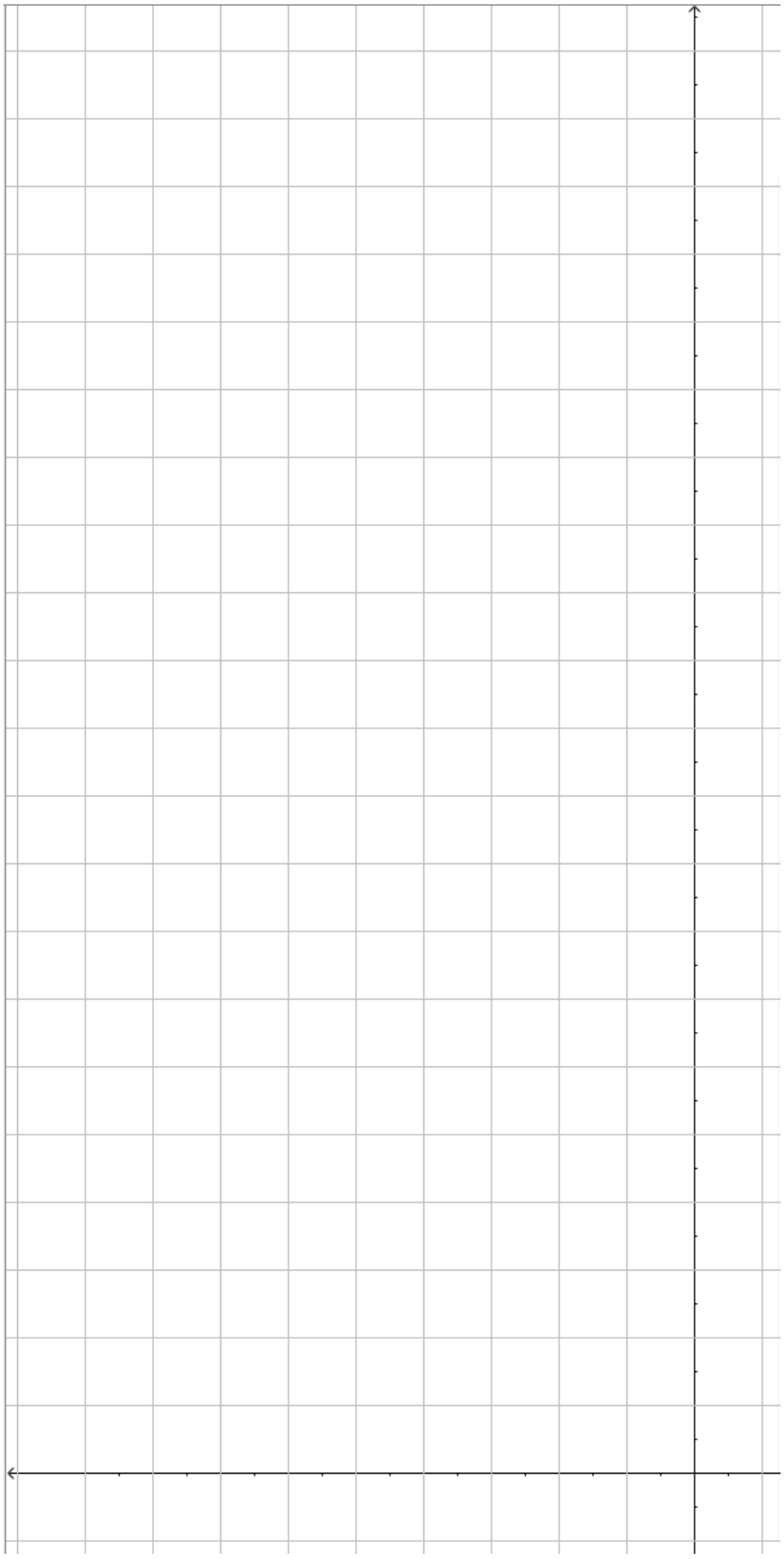
Hinweis: *Koordinatensysteme zum Ausprobieren findet ihr auf der nächsten Seite.*

2) **Gruppenarbeit:** Wie stellt man folgende Situationen am übersichtlichsten dar?
   -Wenig Gewinn und Anlage über einen langen Zeitraum
   -Viel Gewinn und kurze Anlagezeit
   -Was gibt es noch für Möglichkeiten?
   Zeichnet eigene Koordinatensysteme und stellt Kriterien für die Skalierung der Koordinatensysteme auf

Diskutiert in der Gruppe und zeichnet Beispiele!

3) **Gruppenarbeit:** Füllt gemeinsam folgende Merksätze aus

→ Um Gewinne größer wirken zu lassen, muss man die __-Achse _____ skalieren.
→eine _____ skalierte x-Achse lässt den Gewinn niedriger aussehen



Eidesstattliche Versicherung

„Ich versichere an Eides statt durch meine untenstehende Unterschrift,

- dass ich die vorliegende Arbeit - mit Ausnahme der Anleitung durch die Betreuer - selbstständig ohne fremde Hilfe angefertigt habe und
- dass ich alle Stellen, die wörtlich oder annähernd wörtlich aus fremden Quellen entnommen sind, entsprechend als Zitate gekennzeichnet habe und
- dass ich ausschließlich die angegebenen Quellen (Literatur, Internetseiten, sonstige Hilfsmittel) verwendet habe und
- dass ich alle entsprechenden Angaben nach bestem Wissen und Gewissen vorgenommen habe, dass sie der Wahrheit entsprechen und dass ich nichts verschwiegen habe.

Mir ist bekannt, dass eine falsche Versicherung an Eides Statt nach § 156 und nach § 163 Abs. 1 des Strafgesetzbuches mit Freiheitsstrafe oder Geldstrafe bestraft wird.“ (Universität Duisburg-Essen, 2017)

Essen, den 24.05.17 Unterschrift: _____